سلسلۂ نصابیات جامعۂ عثمانیہ

(بی اے کے لئے)

علم مثلث تحلیلی

(حصۂ دوم)

(پروفیسر لونی کی کتاب اینالیٹیکل ٹرگنومیٹری)

جس کو

مولوی شیخ برکت علی صاحب بی۔اے (علیگ) رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ نے اردو میں ترجمہ کیا

سنہ ۱۳۴۰ھ م سنہ ۱۳۳۱ف م سنہ ۱۹۲۲ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

علم مثلث تحلیلی (حصہ دوم)

بسم اللہ الرحمن الرحیم

حصہ دوم

علم مثلث تحلیلی

باب اوّل

سلسلہ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے

۱- باب ہذا میں ہم جملہ $ا^{لا}$ کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کرینگے جہاں ا اور لا سے حقیقی مقادیر مراد ہیں- اور نیز لوک$_و$ (۱ + لا) کی تفصیل دریافت کرینگے جہاں لا حقیقی ہے اور ایک سے کم ہے اور و' ایک ایسی مقدار کو تعبیر کرتا ہے- جسکی تعریف آگے چل کر کیجائیگی-

۲- مقدار $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ کی قیمت معلوم کرو جب ن لا انتہا بڑھ جائے اور حقیقی ہو-

چونکہ $\frac{۱}{ن} < ۱$ اسلئے مسئلہ ثنائی سے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن} \times \frac{1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2} \times \frac{1}{\text{ن}^2}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3} \times \frac{1}{\text{ن}^3} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{\text{ن}}}{|\underline{2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{|\underline{3}}$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{3}{\text{ن}}\right)}{|\underline{4}} + \cdots\cdots$$

یہ سلسلہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے۔ خواہ یہ قیمتیں کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں۔ پس اگر ن کو غیر متناہی بنا دیا جائے تو بائیں جانب کا رکن

$$= 1 + 1 + \frac{1}{|\underline{2}} + \frac{1}{|\underline{3}} + \frac{1}{|\underline{4}} + \cdots\cdots \quad \text{تا لامتناہی}$$

اسلئے جب ن غیر متناہی ہو تو جملہ $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ذیل کے سلسلہ کے حاصل جمع سے تعبیر ہوگی۔

$$1 + 1 + \frac{1}{|\underline{2}} + \frac{1}{|\underline{3}} + \frac{1}{|\underline{4}} + \cdots\cdots \quad \text{تا لامتناہی}$$

اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ہمیشہ علامت " و " سے تعبیر کرتے ہیں

اسلئے $\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}$

اس جگہ $\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}$ سے مراد $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ہے

جب ن لاانتہا بڑھ جائے

نیتجہ صریح - اگر ہم ن کی بجائے $\frac{۱}{م}$ لکھیں تو ظاہر ہے کہ جب ن مائل بہ لاانتنا ہی ہو تو م صفر کے نہایت قریب ہو جائیگا اس لئے

$$و = \text{نہا}_{ن\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = \text{نہا}_{م\to ۰}(۱+م)^{\frac{۱}{م}}$$

۳ - مقدار 'و' ایک متناہی یا محدود مقدار ہے -

چونکہ $\frac{۱}{۲^۲} > \frac{۱}{۲\times۲} > \frac{۱}{\lfloor ۳}$

اور $\frac{۱}{۲^۳} > \frac{۱}{۲\times۲\times۲} > \frac{۱}{\lfloor ۴}$

اس لئے $و > ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \ldots$ تا لاانتناہی

$$> ۱ + \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

$$> ۱ + ۲ \text{ یعنی } > ۳$$

نیز صریحاً $و > ۲$

اس لئے 'و' کی قیمت '۲' اور ۳ کے درمیان واقع ہو گی

اگر ہم سلسلہ متذکرہ بالا کی رقوم کی کافی تعداد لیں تو اُنکو جمع کرنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$و = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵\ldots$$

۴ - مقدار 'و' متبائن ہے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ یہ کسی کسر $\frac{ن}{ق}$ کے مساوی ہے - جہاں

ن اور ق کوئی صحیح اعداد ہیں۔

ت $\frac{\text{ن}}{\text{ق}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ق}!} + \frac{1}{(\text{ق}+1)!} + \frac{1}{(\text{ق}+2)!} + \cdots\cdots$ (۱)

مساوات بالاکے دونوں طرف $\text{ق}!$ سے ضرب دو۔ اس طرح سے سلسلہ (۱) کی سب رقمیں صحیح اعداد بن جائینگی بجز $\frac{\text{ق}!}{(\text{ق}+1)!}$ کے اور اسکے بعد کی رقوم کے۔

اسلئے $\text{ن} \times (\text{ق}-1)! =$ ایک صحیح عدد $+ \frac{\text{ق}!}{(\text{ق}+1)!} + \frac{\text{ق}!}{(\text{ق}+2)!} + \frac{\text{ق}!}{(\text{ق}+3)!} + \cdots\cdots$

یعنی ایک صحیح عدد $= \frac{1}{\text{ق}+1} + \frac{1}{(\text{ق}+1)(\text{ق}+2)} + \frac{1}{(\text{ق}+1)(\text{ق}+2)(\text{ق}+3)} + \cdots\cdots$ (۲)

لیکن اس مساوات کی بائیں جانب کا رکن $< \frac{1}{\text{ق}+1}$ اور

$< \frac{1}{\text{ق}+1} + \frac{1}{(\text{ق}+1)^2} + \frac{1}{(\text{ق}+1)^3} + \cdots\cdots$

یعنی $< \frac{1}{\text{ق}+1} \div \left(1 - \frac{1}{\text{ق}+1}\right)$

یعنی $< \frac{1}{\text{ق}}$

لہذا مساوات (۲) کی بائیں جانب کے رکن کی قیمت $\frac{1}{\text{ق}+1}$ اور $\frac{1}{\text{ق}}$ کے درمیان واقع ہے یعنی ایک کسر ہے اور اسلئے بائیں جانب کے رکن کے مساوی نہیں ہوسکتی۔

اس طرح سے 'و' کو متوافق فرض کرنا غلط ثابت ہوا۔ لہذا 'و' ایک متبائن مقدار ہے۔

۵ ۔ سلسلۂ قوت نما، اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{و}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \text{.........} \quad \text{تا لاتناہی}$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا}\ \text{لوگ}_{\text{و}}\text{ا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}\left(\text{لوگ}_{\text{و}}\text{ا}\right)^2 + \text{.....} \quad \text{تا لاتناہی}$$

اگر لا ایک سے بڑا ہو تو

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}} = \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}}$$

$$= 1 + \text{ن لا}\cdot\frac{1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-1)}{1\times 2}\times\frac{1}{\text{ن}^2}$$

$$+ \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-1)(\text{ن لا}-2)}{1\times 2\times 3}\times\frac{1}{\text{ن}^3} + \text{.........}$$

$$= 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)}{1\times 2} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{1\times 2\times 3} + \text{........}$$

اس جملہ میں فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے
تب دائیں جانب کا رکن حسب دفعہ (۲) $\text{و}^{\text{لا}}$ بن جاتا
ہے اور بائیں جانب کا رکن

$$\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \ldots\ldots \text{ ہو جاتا ہے}$$

اسلئے

$$\text{و}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \ldots \text{ تا لا تناہی} \ldots (\text{۱})$$

فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{و}^{\text{ج}}$ یعنی $\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$
پس سلسلہ (۱) میں لا کی بجاے ج لا لکھنے سے

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{ج لا}} = \text{۱} + \text{ج لا} + \frac{\text{ج}^{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{ج}^{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی}$$

$$\therefore\ \text{ا}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}}\left(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}\right)^{\text{۲}}$$

$$+ \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}}\left(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}\right)^{\text{۳}} + \ldots\ldots \text{ تا لا تناہی} \ldots (\text{۲})$$

۶ - یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (دیکھو سی سمتھ الجبرا دفعہ ۲۸۰) کہ دفعہ ما قبل کا سلسلہ (۱) اور نیز سلسلہ (۲) ہردو لا کی حقیقی قیمتوں کے واسطے مستدق سلسلے ہیں -

۷ - مشق ۱ - ثابت کرو کہ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{و} - \frac{\text{۱}}{\text{و}}\right) = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\lfloor\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\lfloor\text{۵}} + \ldots \text{ تا لا تناہی}$

دفعہ ۵ کی مساوات (۱) میں لا کی بجائے بالترتیب ۱ اور -۱ رکھنے سے

$$\text{و} = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots \text{ تالانتہا}$$

$$\text{و}^{-1} = 1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} - \cdots \text{ تالانتہا}$$

پس عمل تفریق سے

$$\text{و} - \text{و}^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 5} + \cdots\right)$$

یعنی

$$\frac{1}{2}\left(\text{و} - \frac{1}{\text{و}}\right) = 1 + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 5} + \cdots \text{ تالانتہا}$$

مشق ۲ - سلسلۂ ذیل کو جمع کرو۔

$$1 + \frac{1+2}{\lfloor 2} + \frac{1+2+3}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3+4}{\lfloor 4} + \cdots \text{ تالانتہا}$$

$$\text{ن ویں رقم} = \frac{1+2+3+\cdots\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}+1)}{\lfloor \text{ن}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ن}+1}{\lfloor \text{ن}-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\text{ن}-1)+2}{\lfloor \text{ن}-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lfloor \text{ن}-2} + \frac{2}{\lfloor \text{ن}-1}\right]$$

بشرطیکہ $\text{ن} > 2$

$$\text{اسی طرح سے (ن-۱) ویں رقم} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lfloor \text{ن}-3} + \frac{2}{\lfloor \text{ن}-2}\right]$$

....

$$\text{چوتھی رقم} \ldots\ldots = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{2}{\lfloor 3}\right]$$

$$\text{تیسری رقم} \ldots\ldots = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{2}{\lfloor 2}\right]$$

دوسری رقم = ۱/۲ [۱ + ۲/|۱]

پہلی رقم = ۱/۲ [۲/۱]

پس عمل جمع سے سلسلہ مذکور

= ۱/۲ [۱ + ۱/|۱ + ۱/|۲ + ۱/|۳ + ... تالامتناہی]

+ ۱/۲ × ۲ [۱ + ۱/|۱ + ۱/|۲ + ۱/|۳ + ... تالامتناہی]

= ۱/۲ و + و = ۳/۲ و

۸ — لوکارتمی سلسلہ — اگر ما حقیقی ہو اور تعداداً > ۱ تو ثابت کرو کہ

لوک$_{و}$ (۱ + ما) = ما − ۱/۲ ما^{2} + ۱/۳ ما^{3} − ۱/۴ ما^{4} + ... تالامتناہی

دفعہ ۵ کی مساوات ۲ میں فرض کرو کہ

أ = ۱ + ما

تب (۱ + ما)^{لا} = ۱ + لا لوک$_{و}$ (۱ + ما)

+ لا^{2}/|۲ {لوک$_{و}$ (۱ + ما)}^{2} + ... (۱)

لیکن ما حقیقی ہے اور تعداداً ایک سے کم ہے

اسلئے

$$(۱+ما)^{لا} = ۱ + لاما + \frac{لا(لا-۱)}{\underline{|۲}} ما^۲ + \frac{لا(لا-۱)(لا-۲)}{\underline{|۳}} ما^۳ + \ldots \quad (۲)$$

چونکہ ما تعداداً کم ہے ایک سے، اسلئے
مساوات (۱) اور مساوات (۲) دونوں میں بائیں جانب کے سلسلے باہم مساوی ہونگے۔ اور نیز مستدق ہونگے۔ علاوہ ازیں یہ بھی آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر (۲) میں بائیں جانب کے سلسلہ کو لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ لہٰذا ہم لا کی برابر قوتوں والی رقوم کے سروں کو مساوی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے

$$لوک_و(۱+ما) = ما - \frac{ما^۲}{۱\times۲} + \frac{(-۱)(-۲)}{۱\times۲\times۳} ما^۳$$

$$+ \frac{(-۱)(-۲)(-۳)}{۱\times۲\times۳} \cdot ما^۴ + \ldots\ldots \text{تا لاتناہی}$$

یعنی $لوک_و(۱+ما) = ما - \frac{۱}{۲}ما^۲ + \frac{۱}{۳}ما^۳ - \frac{۱}{۴}ما^۴ + \ldots$ تالاتناہی (۳)

9- اگر ما = ۱ تو دفعہ ماقبل کا سلسلہ

$= ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots$ تا لاتناہی (جو صریحاً مستدق ہے)

اگر ما = -۱ تو سلسلہ مذکور

$= -۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \ldots\ldots$ تا لاتناہی (جو صریحاً متشع ہے)

لہٰذا یہ سلسلہ ما کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو -۱ اور ۱ کے درمیان ہوں درست ہوگا اور علاوہ ازیں اس حالت میں بھی درست رہے گا جب ما = ۱،

لیکن اگر ما = -۱ تو یہ سلسلہ دائیں جانب کے رکن کا مترادف نہ ہوگا۔

۱۰۔ اساس و پر کے لوکارتھم معلوم کرو۔

مندرجہ بالا لوکارتھمی سلسلہ میں فرض کرو کہ ما = ۱ تب

$لوک_و ۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots$ تا لاتناہی ... (۱)

فرض کرو کہ ما = $\frac{۱}{۲}$ تب

$لوک_و ۳ - لوک_و ۲ = لوک_و \frac{۳}{۲} = لوک_و \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)$

$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲^{۳}} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲^{۴}} + \ldots\ldots$ (۲)

فرض کرو کہ ما = $\frac{۱}{۳}$ تب

$لوک_و ۴ - لوک_و ۳ = لوک_و \left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)$

$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳^{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳^{۳}} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳^{۴}} + \ldots$ (۳)

اگر ان مساواتوں کی رقوم کی کافی تعداد لی جائے تو ہم لوک و ۲، لوک و ۳، لوک و ۴ کی قیمتیں محسوب کر سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ کافی درجہ تک درست نتائج حاصل کرنے کے واسطے سلسلہ بالا میں بہت زیادہ رقوم لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اسلئے ہم ایک زیادہ سہولت بخش سلسلہ معلوم کرتے ہیں۔

۱۱۔ دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{\text{ما}^2}{2} + \frac{\text{ما}^3}{3} - \frac{\text{ما}^4}{4} + \dots\dots \quad (1)$$

ما کی علامت تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1-\text{ما}) = -\text{ما} - \frac{\text{ما}^2}{2} - \frac{\text{ما}^3}{3} - \frac{\text{ما}^4}{4} + \dots\dots\dots \quad (2)$$

ان دونوں سلسلوں کے درست ہونیکے لئے لازمی ہے ۔
کہ ما کی قیمت تعداداً ایک سے کم ہو ۔
عمل تفریق سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) - \text{لوک}_{\text{و}}(1-\text{ما}) = \text{لوک}_{\text{و}}\frac{1+\text{ما}}{1-\text{ما}}$$

$$= 2\left[\text{ما} + \frac{\text{ما}^3}{3} + \frac{\text{ما}^5}{5} + \dots\dots\right] \dots\dots \quad (3)$$

فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ جہاں م اور ن دونوں صحیح اعداد ہیں

اور م > ن

$$\text{پس } \frac{1+\text{ما}}{1-\text{ما}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

تب مساوات (۳) حسب ذیل ہو جائے گی

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{م}}{\text{ن}} = 2\left[\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^5 + \dots\right] \dots \quad (4)$$

مساوات (۴) میں م کی بجائے ۲ اور ن کی بجائے ۱ لکھنے سے لوگ و ۲ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے اور م کی بجائے ۳ اور ن کی بجائے ۲ لکھنے سے [لوگ و ۳ − لوگ و ۲] معلوم ہو سکتا ہے
اور اس سے لوگ و ۳ کی قیمت نکل سکتی ہے۔
اسی عمل سے کسی اور عدد کا لوکارتم اساس و پر معلوم ہو سکتا ہے

۱۲۔ اساس ۱۰ پر کے لوکارتم معلوم کرو

گزشتہ دفعہ کے لوکارتم اساس و پر نکالے گئے ہیں ان کو بالعموم نیپری یا طبعی لوکارتم کے نام سے موسوم کرتے ہیں ہم ان لوکارتموں کو اساس ۱۰ پر کے لوکارتموں میں منتقل کر سکتے ہیں۔
اگر ع کوئی عدد ہو تو دفعہ ۱۵۳ (حصہ اول) کی رو سے

لوگ و ع = لوگ ۱۰ ع × لوگ و ۱۰

∴ لوگ ۱۰ ع = لوگ و ع × ۱ / لوگ و ۱۰

اب حسب دفعہ گزشتہ لوگ و ۱۰ کی قیمت نکل سکتی ہے
جس سے معلوم ہو سکتا ہے کہ

۱ / لوگ و ۱۰ = ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹...

اسلئے لوگ ۱۰ ع = لوگ و ع × ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸...

پس ثابت ہوا کہ اگر کسی عدد کا لوکارتم اساس ۱۰ پر معلوم کرنا

مقصود ہو تو اس عدد کا جو لوکارتم اساس و پر ہو اس کو مقدار ۴۳۴۲۹۴۴۸......، سے ضرب دیتے ہیں اس کسر اعشاریہ کو ضارب معیّن کہتے ہیں اور بالعموم 'مب' سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ ۱

ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots\cdots$

(۲) $(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots)(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots) = 1$

(۳) $(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots)^2 = 1 + (1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots)^2$

(۴) $1 + \frac{2}{3!} + \frac{3}{5!} + \frac{4}{7!} + \cdots\cdots = \frac{e}{2}$

(۵) $\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \cdots\cdots = e^{-1}$

(۶) $\dfrac{\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots\cdots}{1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\cdots} = \frac{e-1}{e+1}$

(۷) $1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \cdots\cdots = 5e$

ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

(۸) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$ تا لاتناہی

(۹) $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲^{۳}} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲^{۴}} + \cdots\cdots$ تا لاتناہی

ثابت کرو کہ

(۱۰) $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}}\right)^{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}}\right)^{۳} + \cdots\cdots$

$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ب}$

(۱۱) $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}} = ۲\left(\text{لا} + \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۵}\text{لا}^{۵} + \cdots\cdots\right.$ تا لاتناہی)

(۱۲) $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{لا} + ۱}{\text{لا} - ۱} = ۲\left(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{۳\,\text{لا}^{۳}} + \frac{۱}{۵\,\text{لا}^{۵}} + \cdots\right.$ تا لاتناہی)

اگر لا > ۱

(۱۳) $\text{لوک}_{\text{و}}(۱ + ۳\,\text{لا} + ۲\,\text{لا}^{۲}) = ۳\,\text{لا} - \frac{۵\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{۹\,\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{۱۷\,\text{لا}^{۴}}{۴}$

$+ \cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱} \times \frac{۲^{\text{ن}} + ۱}{\text{ن}} \times \text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots\cdots$

بشرطیکہ ۲ لا بڑا نہ ہو ، ۱ سے

(۱۴) $۲\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} + ۱) - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} - ۱) = \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۲\,\text{لا}^{۴}}$

$+ \frac{۱}{۳\,\text{لا}^{۶}} + \cdots\cdots\cdots$ اگر لا > ۱

(۱۵) $\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ = \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \frac{۱}{۵ \times ۶} + \cdots\cdots$ تا لاتناہی

(۱۶) $\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۶ \times ۷} + \cdots$

تا لاتناہی

(۱۷) $\text{مس}\,\text{ط} + \frac{۱}{۳}\,\text{مس}^{۳}\,\text{ط} + \frac{۱}{۵}\,\text{مس}^{۵}\,\text{ط} + \cdots$

$= \frac{۱}{۲}\,\text{لوک} \frac{\text{جم}\left(\text{ط} - \frac{\pi}{۴}\right)}{\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{۴}\right)}$ اگر ط < $\frac{\pi}{۴}$

(۱۸) اگر طہ > π/۲ اور < π تو ثابت کرو کہ

(۱) جب طہ + ۱/۳ جب۳ طہ + ۱/۵ جب۵ طہ + ... تا لاتناہی

= ۲ [مم طہ/۲ + ۱/۳ مم۳ طہ/۲ + ۱/۵ مم۵ طہ/۲ + ... تا لاتناہی]

اور اگر طہ > صفر اور < π/۲ تو ثابت کرو کہ

(۲) ۱/۲ جب۲ طہ + ۱/۴ جب۴ طہ + ۱/۶ جب۶ طہ + ... تا لاتناہی

= ۲ [مس۲ طہ/۲ + ۱/۳ مس۶ طہ/۲ + ۱/۵ مس۱۰ طہ/۲ + ... تا لاتناہی]

(۱۹) اگر مس۲ طہ < ۱ تو ثابت کرو کہ

مس۲ طہ − ۱/۲ مس۴ طہ + ۱/۳ مس۶ طہ − ...... تا لاتناہی

= جب۲ طہ + ۱/۲ جب۴ طہ + ۱/۳ جب۶ طہ + ... تا لاتناہی

(۲۰) ثابت کرو کہ اگر ۲ طہ، π کا ضعف نہ ہو تو

لوک مم طہ = جم۲ طہ + ۱/۳ جم۳ ۲ طہ + ۱/۵ جم۵ ۲ طہ + ... تا لاتناہی

(۲۱) ثابت کرو کہ {لوکہ (۱ + لا)}۲ کی تفصیل میں لان کا سر

۲(−۱)ن/ن [۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + ... + ۱/(ن−۱)] ہوگا

(۲۲) ـ دفعات ۱۱، ۱۲ کی مدد سے ثابت کرو کہ

لوک۱۰ ۲ = ۰.۳۰۱۰۳ ......

اور لوک$_{ب}$ ۳ = ... ۰٫۴۷۷۱۲ ...

(۲۳) منحنی ما = لوک$_{ب}$ لا کو مرتسم کرو

[اگر لا منفی ہو تو ما خیالی ہوگا - جب لا، صفر کے مساوی ہو تو ما = −∞ جب لا = ۱ تو ما کی قیمت صفر ہوگی - جب لا، مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ما ہمیشہ مثبت رہیگا - جب لا، لامتناہی ہو تو ما بھی لامتناہی ہوگا]

(۲۴) منحنی ما = لوک$_{ب}$ لا کو مرتسم کرو - اس کا اور گزشتہ مشق کے منحنی کا ہندسی ربط معلوم کرو [دفعہ ۱۵۳ حصہ اول کو استعمال کرو]

(۲۵) منحنی ما = ب^{لا} کو مرتسم کرو -

۱۳ - اگلے باب میں ذیل کی دو انتہائی قیمتوں کے استعمال کی ضرورت واقع ہوگی -

۱۴ - ثابت کرو کہ $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے جب ن لا انتہا بڑھ جائے -

$$\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}} = \left(۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\therefore \left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \left(۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{۲}} = \left[\left(۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{-\frac{۱}{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}}\right]^{-\frac{\text{ن}}{۲}\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$$

اب $\left(-\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$ کی بجائے م فرض کرنے سے

$$\underset{\text{ن}=\infty}{\text{نہا}}\left\{۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right\}^{-\frac{۱}{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}} = \underset{\text{م}=۰}{\text{نہا}}\left\{۱ + \text{م}\right\}^{\frac{۱}{\text{م}}} = \text{و} \ldots\ldots$$ [نتیجہ صریح دفعہ ۲]

نیز از روئے دفعہ ۲۳۴ (حصہ اول)

$$\frac{\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{}$$

$$=\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{۲}}\times\frac{\text{ع}^{\text{۲}}}{\text{۲ن}}=\text{۱}\times\text{۰}=\text{۰}\qquad[\text{بشرطیکہ ن}=\infty]$$

پس جب ن مائل بہ لاتناہی ہو تو

$$\left[\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right]^{\text{ن}}=\text{فو}=\text{۱}$$

تبادل ثبوت ۔ لوگارتمی سلسلہ کے استعمال سے بھی یہ انتہائی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے کیونکہ $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کو ی کے مساوی فرض کرنے سے

$$\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{ی}=\text{ن}\;\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}=\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\;\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$$

$$=\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\;\text{لوگ}_{\text{و}}\left(\text{۱}-\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$$

$$=-\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\left(\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۴}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{جب}^{\text{۶}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\cdots\right)\text{۔}$$

..... دفعہ ۸

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ بلحاظ قیمت کے $\left(\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$ اور سلسلہ $\left(\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\text{جب}^{\text{۴}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\text{جب}^{\text{۶}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}+\ldots\right.$ تا لاتناہی) کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

یعنی یہ سلسلہ $\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{۱-\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

یعنی $\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ اور $\text{مس}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

لہذا (- لوک ی) ذیل کی دو رقوم کے درمیان واقع ہوگا۔

$\frac{\text{ن}}{۲}\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{ن}}{۲}\text{مس}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ ..... (۱)

لیکن

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\frac{\text{ن}}{۲}\text{جب}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}=\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{۲}\times\frac{\text{ع}^{۲}}{۲\text{ن}}=۱\times۰=۰$$

$$\text{اور نہا}_{\text{ن}\to\infty}\frac{\text{ن}}{۲}\text{مس}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}=\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left\{\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{۲}\times\frac{۱}{\text{جم}^{۲}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\times\frac{\text{ع}^{۲}}{۲\text{ن}}\right\}$$

$=۱\times۱\times۰=۰$ دفعہ ۲۳۴ حصہ اول

اس سے معلوم ہوا کہ (۱) کی دونوں مقداروں کی انتہائی قیمت صفر ہے

پس لوک ی بھی صفر ہوگا، یعنی ی = ۱

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر ن لا انتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے۔

دفعہ ۲۳۳ حصہ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ جب ط، ط، اور
مس ط بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوتے ہیں۔
بنابریں جب $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$، $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$، اور مس $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ بھی صعودی ترتیب
میں ہیں۔

اسلئے ۱، $\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$، $\frac{1}{\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}$ بھی صعودی ترتیب میں ہیں —

پس $\left(\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی قیمت ۱، اور $\left(\frac{1}{\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کے

درمیان واقع ہوگی یعنی $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ ۱، اور $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوگا

لیکن دفعہ گزشتہ کی رو سے اگر ن لا انتہا بڑھ جائے تو $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$
کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے

اسلئے جب ن لا انتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی
قیمت ایک سے نہایت قریب ہوگی

۱۹ — دفعہ ۲ میں ایک بات غور طلب ہے۔
ہمیں زیادہ موثق طور پر یہ ثابت کرنا چاہیئے کہ اگر ن لامتناہی ہو تو فی الحقیقت
مساوات (۱) کی بائیں جانب کے سلسلہ کی قیمت سلسلہ (۲) کے

مساوی ہوتی ہے۔

سلسلہ (۱) کی (ق+۱) ویں رقم پر، یعنی

$$\frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{ق}-1}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ق}}}\quad\ldots\ldots(1)$$

پر غور کرو۔

اگر ا، ب، ج، ... سب مثبت مقداریں ہوں اور ان میں سے ہر رقم ایک سے کم ہو تو

$$(1-\text{ا})(1-\text{ب}) = 1-\text{ا}-\text{ب}+\text{اب} > 1-\text{ا}-\text{ب}$$

اور $(1-\text{ا})(1-\text{ب})(1-\text{ج}) > (1-\text{ا}-\text{ب})(1-\text{ج}) > 1-\text{ا}-\text{ب}-\text{ج}$

علیٰ ہذا القیاس

یعنی بالآخر $(1-\text{ا})(1-\text{ب})(1-\text{ج})\cdots > 1-(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\cdots)$

پس (۱) کا شمار کنندہ ایک اور ذیل کے سلسلہ کے درمیان واقع ہوگا

$$1-\left(\frac{1}{\text{ن}}+\frac{2}{\text{ن}}+\frac{3}{\text{ن}}+\cdots+\frac{\text{ق}-1}{\text{ن}}\right)$$

یعنی ایک اور $1-\frac{\text{ق}(\text{ق}-1)}{2\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوگا

اسلئے مقدار (۱)، $\frac{1}{\underline{|\text{ق}}}$ اور $\frac{1}{\underline{|\text{ق}}}-\frac{1}{2\text{ن}}\times\frac{1}{\underline{|\text{ق}-2}}$ کے درمیان واقع ہوگی

لہذا دفعہ ۲ کے پورے سلسلہ (۱) کی قیمت سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots$$ تا لاتناہی اور سلسلہ

$$1+1+\left(\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{2\text{ن}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|3}}-\frac{1}{2\text{ن}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{2\text{ن}}\times\frac{1}{\underline{|2}}\right)+\cdots$$ لاتناہی

کے درمیان واقع ہوگی۔

بالفاظ دیگر $۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$ تالاتناہی

اور $\Big[۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$ لاتناہی

$- \frac{۱}{۲^{ن}} \Big(۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$ تالاتناہی$\Big) \Big]$ کے درمیان واقع ہوگی

اب بموجب دفعہ ۶ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$ تالاتناہی

ستدق ہے ۔ اسلئے مقدار $\frac{۱}{۲^{ن}} \Big(۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots \Big)$ کی قیمت

صفر ہوجائےگی جب ن مائل بہ لاتناہی ہو

اسلئے بالآخر دفعہ (۲) کا سلسلہ (۱) انتہائی صورت میں ذیل کا سلسلہ بن جائےگا ۔

$۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \ldots\ldots$ تالاتناہی

اسی قسم کا استدلال دفعہ ۵ کے سلسلوں اور نیز دفعات ۳۲، ۳۳ کے سلسلوں پر بھی صادق آئیگا ۔

باب دوم

ملتف مقداریں

ڈی مائرے کا مسئلہ

۱۷- ملتف مقداریں- اگر لا اور ما دونوں حقیقی ہوں تو مقدار لا + ما $\sqrt{-1}$ کو مقدار ملتف کہتے ہیں- لہذا ثابت ہوا کہ ملتف مقدار ایسی دو رقوم کے حاصل جمع پر مشتمل ہوتی ہے- جن میں سے ایک رقم بالتمام حقیقی ہوتی ہے اور دوسری بالتمام غیر حقیقی (یعنی خیالی)

۱۸- ہم ایک ملتف مقدار کو ہمیشہ ر (جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط) کی شکل میں لکھ سکتے ہیں- جہاں ر، اور ط دونوں حقیقی ہیں-

فرض کرو کہ لا + ما $\sqrt{-1}$ = ر (جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط)

= ر جم ط + $\sqrt{-1}$ ر جب ط

مساوات بالا کے دونوں جانب کے حقیقی اور غیر خیالی حصوں کو الگ الگ مساوی کرنے سے

ر جم ط = لا .... (۱)

اور　ر جب ط = ما .... (۲)

اور ان کے مربعوں کو باہم جمع کرنے سے

$ر^{۲} = لا^{۲} + ما^{۲}$　یعنی　$ر = \pm\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$

رواجاً جذر ہذا کی علامت مثبت لیتے ہیں۔ پس ر کی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

تب (۱) اور (۲) سے

$$جم\,ط = \frac{لا}{\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}} \quad اور\quad جب\,ط = \frac{ما}{\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}}$$

لا اور ما کی قیمتیں خواہ کچھ ہی کیوں نہ ہوں، + π اور − π کے درمیان ط کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت ہوگی جو اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کرے گی۔

پس ثابت ہوا کہ مقدار $لا + ما\sqrt{-۱}$ ہمیشہ $ر(جم\,ط + \sqrt{-۱}\,جب\,ط)$ کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔

تعریف۔ مقدار $+\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$ کو متذکرہ بالا مختلف مقدار کا **مقیاس** کہتے ہیں اور ط کی وہ قیمت جو − π اور + π کے درمیان واقع ہو اور ہر دو روابط

$جم\,ط = \frac{لا}{\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}}$ اور $جب\,ط = \frac{ما}{\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}}$ کو پورا کرے

جملہ لا + √۱- ما کی سعت کی خاص قیمت کہلاتی ہے

۱۹- مشق ۱- مقدار ۱ + √۱- کو مذکورہ بالا شکل میں ظاہر کرو

یہاں ۱ + √۱- = ر(جم طہ + √۱- جب طہ)

جس سے ر جم طہ = ۱

ر جب طہ = ۱

پس ر = + √(۱+۱) = + √۲

لہذا جم طہ = ۱/√۲ اور جب طہ = ۱/√۲

یعنی طہ = π/۴

اس لئے ۱ + √۱- = √۲ [جم π/۴ + √۱- جب π/۴]

پس رقم مذکور کا مقیاس √۲ ہے اور اس کی سعت کی خاص قیمت π/۴ ہے۔

مشق ۲- رقم ۱- + √۳- کو مذکورہ بالا شکل میں منتقل کرو۔

اس جگہ ۱- + √۱- × √۳ = ر(جم طہ + √۱- جب طہ)

پس ر جم طہ = ۱- اور ر جب طہ = √۳

∴ ر = + √(۱+۳) = +۲

لہذا جم طہ = -۱/۲ اور جب طہ = √۳/۲

یعنی طہ = ۲π/۳

$$-۱ + \sqrt{-۳} = ۲\left[\text{جم}\,\frac{۲\pi}{۳} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi}{۳}\right]$$

شق ۳ — مقدار $-۱-\sqrt{-۳}$ کو مذکورہ بالا شکل میں لاؤ۔

یاں رجم ط = -۱ اور رجب ط = $-\sqrt{۳}$

ں ر = $+\sqrt{۱+۳} = +۲$ لہذا جم ط = $-\frac{۱}{۲}$ اور جب ط = $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

نکہ ہم ط کے لئے ایسی قیمت منتخب کرتے ہیں جو $-\pi$ اور π کے

میان واقع ہو اسلئے ط = $-\frac{۲\pi}{۳}$

$$-۱-\sqrt{-۳} = ۲\left[\text{جم}\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right) + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right)\right]$$

۴ — دفعہ ۱۸ کی مساواتیں

$$\text{جم ط} = \frac{\text{لا}}{+\sqrt{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}} \quad \text{اور} \quad \text{جب ط} = \frac{\text{ما}}{+\sqrt{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}}$$

کی ایک سے زیادہ قیمتوں سے پوری ہوتی ہیں - اس کی
یہ ہے - کہ کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمتوں
کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جب اس زاویہ میں ۲π کے
ی ضعف کا اضافہ کردیا جائے۔

پس اگر ط سے ایسی قیمت مراد لی جائے جو π اور $-\pi$
کے درمیان واقع ہو - اور مذکورہ بالا روابط کو پورا کرے
وہ سب زوایا بھی جو $۲ن\pi +$ ط سے تعبیر کئے جاسکتے ہیں
روابط مذکورہ کو پورا کرینگے - یا بالفاظ دیگر ہم یوں کہہ سکتے ہیں

یک ملتف مقدار کی سعت کثیر القیمت ہوتی ہے اور سعت
خاص قیمت سے اس کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جو +π اور
-π کے درمیان واقع ہو۔ اس جگہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے
اگر ہم طہ کی خاص قیمت میں ۲π کا کوئی ضعف جمع
ردیں۔ تو اس کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت حاصل ہوگی
لاصہ یہ ہے کہ
اگر طہ سے ایسا زاویہ مراد ہو جو -π اور +π کے درمیان واقع ہو
ر ذیل کی دونوں مساواتوں

$$\text{جم طہ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}}$$

$$\text{جب طہ} = \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}} \qquad (۱)$$

کو پورا کرے

$$\text{تو } \text{لا} + \text{ما}\sqrt{-1} = \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}\left[\text{جم}(۲\text{ن}\pi + \text{طہ}) + \sqrt{-1}\,(۲\text{ن}\pi + \text{طہ})\right]$$

مقدار ۲ن π + طہ کو سعت اور طہ کو اس سعت کی خاص قیمت
کہتے ہیں۔
اختصار کی غرض سے مساوات (۱) کو بالعموم مس طہ = $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$
یعنی طہ = $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے
کہ یہاں طہ سے مراد صرف وہ زاویہ ہے۔ جو ہر دو مساوات

(۱) کو پورا کرتا ہے۔

۲۱۔ ڈی مائیورے کا مسئلہ۔ ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو مثبت ہو یا منفی، صحیح عدد ہو یا مکسور، ہر حالت میں

(جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط)$^{\text{ن}}$

کی قیمت یا اسکی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ن ط + $\sqrt{-1}$ جب ن ط) ہوگی

صورت اوّل۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب عمل ضرب سے

(جم عہ + $\sqrt{-1}$ جب عہ) (جم بہ + $\sqrt{-1}$ جب بہ)

= جم عہ جم بہ − جب عہ جب بہ + $\sqrt{-1}$ [جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ]

= جم (عہ + بہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ)

اسی طرح سے (جم عہ + $\sqrt{-1}$ جب عہ) (جم بہ + $\sqrt{-1}$ جب بہ) (جم جہ + $\sqrt{-1}$ جب جہ)

= [جم (عہ + بہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ)] [جم جہ + $\sqrt{-1}$ جب جہ]

= [جم (عہ + بہ) جم جہ − جب (عہ + بہ) جب جہ]

+ $\sqrt{-1}$ [جب (عہ + بہ) جم جہ + جم (عہ + بہ) جب جہ]

= جم (عہ + بہ + جہ) + $\sqrt{-1}$ جب (عہ + بہ + جہ)

ظاہر ہے کہ ہم جہاں تک چاہیں اس عمل کو وسعت دے سکتے ہیں۔

لہذا (جم عہ + √-۱ جب عہ) (جم بہ + √-۱ جب بہ)

×(جم جہ + √-۱ جب جہ) . . . ن اجزائے ضربی تک

= جم (عہ + بہ + جہ + ... ن رقوم تک)

+ √-۱ جب (عہ + بہ + جہ + .. ن رقوم تک)

اس میں عہ = بہ = جہ = ... = طہ رکھنے سے

(جم طہ + √-۱ جب طہ)^ن = جم ن طہ + √-۱ جب ن طہ

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ ن ایک منفی صحیح عدد ہے۔ اور -م کے برابر ہے۔ قوت نماؤں کے معمولی ضوابط کے بموجب

(جم طہ + √-۱ جب طہ)^ن = (جم طہ + √-۱ جب طہ)^-م

= ۱ / (جم طہ + √-۱ جب طہ)^م = ۱ / (جم م طہ + √-۱ جب م طہ) .. حسب سابق

= (جم م طہ - √-۱ جب م طہ) / (جم م طہ √-۱ جب م طہ) (جم م طہ - √-۱ جب م طہ)

$$= \frac{\text{جم م ط} - \sqrt{-1}\ \text{جب م ط}}{\text{جم}^{2}\ \text{م ط} + \text{جب}^{2}\ \text{م ط}}$$

= جم م ط − $\sqrt{-1}$ جب م ط

= جم (− م) ط + $\sqrt{-1}$ جب (− م) ط

= جم ن ط + $\sqrt{-1}$ جب ن ط

صورت سوم ۔ فرض کرو کہ ن ایک کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہے جہاں ق سے کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے اور ف کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے ۔

گزشتہ صورتوں کی رو سے $\left(\text{جم}\ \frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{ط}}{\text{ق}}\right)^{\text{ق}}$

= جم $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ × ق + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ × ق = جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط

اسلئے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ ایک ایسی رقم ہے جسکی ق ویں قوت جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط ہے ۔

لہذا جم ط + $\sqrt{-1}$ جب ط کے ق ویں جذروں میں سے ایک جذر جم $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ ہے ۔

یعنی $\left(\text{جم ط} + \sqrt{-1}\ \text{جب ط}\right)^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی ق قیمتوں میں سے ایک

قیمت جم $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ ہے ان دونوں رقوم میں سے ہر ایک کی ف ویں قوت لو۔ تب ظاہر ہے کہ

(جم ط + $\sqrt{-۱}$ جب ط)$^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$)$^{\text{ف}}$

یعنی جم $\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}$ + $\sqrt{-۱}$ جب $\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}$ ہے

۲۲۔ بالعموم $\sqrt{-۱}$ کو حرف خ سے یا اختصاراً خَ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور بعد ازیں یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

اسلیئے جم ط + خ جب ط سے مراد جم ط + $\sqrt{-۱}$ جب ط ہوگی

مشق ۱۔ اختصار کرو

$$\frac{(\text{جم ۳ط + خ جب ۳ط})^{۵}\,(\text{جم ط − خ جب ط})^{۳}}{(\text{جم ۵ط + خ جب ۵ط})^{۷}\,(\text{جم ۲ط − خ جب ۲ط})^{۵}}$$

ظاہر ہے کہ (جم ۳ط + خ جب ۳ط) = (جم ط + خ جب ط)^{۳}

اور جم ط − خ جب ط = جم (− ط) + خ جب (− ط) = (جم ط + خ جب ط)$^{-۱}$

نیز (جم ۵ط + خ جب ۵ط) = (جم ط + خ جب ط)^{۵}

اور جم ۲ط − خ جب ۲ط = جم (− ۲ط) + خ جب (− ۲ط)

= (جم طہ + خ جب طہ)^۱۴

پس مذکورہ بالا رقم

= (جم طہ + خ جب طہ)^۱۵ (جم طہ + خ جب طہ)^-۳۰ ÷ (جم طہ + خ جب طہ)^۳۵ (جم طہ + خ جب طہ)^-۱۰

= (جم طہ + خ جب طہ)^-۱۳ = جم ۱۳ طہ - خ جب ۱۳ طہ

ق ۲- اگر ۲ جم طہ = لا + ۱/لا اور ۲ جم فہ = ما + ۱/ما تو ثابت کرو کہ

^م ما^ن + ۱/(لا^م ما^ن) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

۲ جم (م طہ + ن فہ) ہوگی

ہر ہے کہ لا^۲ - ۲ لا جم طہ = -۱

∴ (لا - جم طہ)^۲ = -۱ + جم^۲ طہ = - جب^۲ طہ

∴ لا = جم طہ + خ جب طہ

یعنی　لا^م = جم م طہ + خ جب م طہ

اور　۱/لا^م = جم م طہ - خ جب م طہ

سی طرح سے　ما = جم فہ + خ جب فہ

یعنی　ما^ن = جم ن فہ + خ جب ن فہ

اور　۱/ما^ن = جم ن فہ - خ جب ن فہ

∴ لا^م ما^ن + ۱/(لا^م ما^ن) = (جم م طہ + خ جب م طہ)(جم ن فہ + خ جب ن فہ)

+ (جم م طہ - خ جب م طہ)(جم ن فہ - خ جب ن فہ)

= جم (م طہ + ن فہ) + خ جب (م طہ + ن فہ)

+ جم (م طہ + ن فہ) − خ جب (م طہ + ن فہ)

= ۲ جم (م طہ + ن فہ)

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}}}{\text{یا}^{\text{ن}}} + \frac{\text{یا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{م}}}$$

کی ایک قیمت ۲ جم (م طہ − ن فہ) ہوگی

مشق ۳۔ اگر جب عہ + جب بہ + جب جہ = جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰
تو ثابت کرو کہ

جم ۳ عہ + جم ۳ بہ + جم ۳ جہ = ۳ جم (عہ + بہ + جہ)

اور جب ۳ عہ + جب ۳ بہ + جب ۳ جہ = ۳ جب (عہ + بہ + جہ)

علم مثلث میں بہت سی ایسی متماثل مساواتیں ہیں جو الجبرا کی متماثل مساواتوں سے اخذ کی گئی ہیں۔ مشق ہذا ایسی مساواتوں کی ایک مثال ہے۔

ہم کو الجبرا سے معلوم ہے کہ اگر ا + ب + ج = ۰

تو $\text{ا}^{۳} + \text{ب}^{۳} + \text{ج}^{۳}$ = ۳ ا ب ج

فرض کرو کہ ا = جم عہ + خ جب عہ

ب = جم بہ + خ جب بہ

ج = جم جہ + خ جب جہ

چونکہ ا + ب + ج = ۰

∴ (جم عہ + خ جب عہ)^۳ + (جم بہ + خ جب بہ)^۳ + (جم جہ + خ جب جہ)^۳

= ۳ (جم عہ + خ جب عہ) (جم بہ + خ جب بہ) (جم جہ + خ جب جہ)

یعنی ڈی مائیورے کے مسئلہ سے

(جم ۳ عہ + جم ۳ بہ + جم ۳ جہ) + خ (جب ۳ عہ + جب ۳ بہ + جب ۳ جہ)

= ۳ جم (عہ + بہ + جہ) + ۳ خ جب (عہ + بہ + جہ)

حقیقی حصوں کو آپس میں اور خیالی حصوں کو آپس میں الگ الگ برابر کرنے سے نتائج مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

امثلہ ۲

ذیل کی رقوم کو ر (جم طہ + خ جب طہ) کی شکل میں منتقل کرو۔

(۱) ۱ + خ　　(۲) -۱ - خ　　(۳) -√۳ + خ

(۴) ۳ + ۴ خ　　(۵) ۱ + √۲ + خ　　(۶) ۲ - √۳ + خ

اختصار کرو۔

(۷) (جم طہ - خ جب طہ)^۱۰ / (جم عہ + خ جب عہ)^۱۲

(۸) (جم عہ + خ جب عہ)(جم بہ + خ جب بہ) / (جم جہ + خ جب جہ)(جم لہ + خ جب لہ)

(۹) (جم ۲ طہ - خ جب ۲ طہ)^۷ (جم ۳ طہ + خ جب ۳ طہ)^-۵ / (جم ۴ طہ + خ جب ۴ طہ)^۱۲ (جم ۵ طہ - خ جب ۵ طہ)^-۹

(۱۰) (جم ٹ/۹ - خ جب ٹ/۹)^(۳/۲) / (جم ٹ/۹ + خ جب ٹ/۹)^(۱/۲)

(۱۱) (جم عہ + خ جب عہ)^۴ / (جب بہ + خ جب بہ)^۵

(۱۲) {(جم ط - جم فہ) + خ (جب ط - جب فہ)}^ن

+ {(جم ط - جم فہ) - خ (جب ط - جب فہ)}^ن

(۱۳) ثابت کرو کہ

(جب لا + خ جم لا)^ن = جم ن (π/۲ - لا) + خ جب ن (π/۲ - لا)

اور ((۱ + جب فہ + خ جم فہ) / (۱ + جب فہ - خ جم فہ))^ن = جم (πن/۲ - ن فہ)

+ خ جب (πن/۲ - ن فہ)

اگر جم عہ + خ جب عہ، جم بہ + خ جب بہ، جم جہ + خ جم جہ، اور جم لہ + خ جم لہ کی بجائے بالترتیب لا، ما، ی اور سے رکھے جائیں۔ تو ثابت کرو کہ

(لا + ما)(سے + ی) = ۴ جم (عہ - بہ)/۲ جم (جہ - لہ)/۲

[جم (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲ + خ جب (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲]

۱۵ ۱ / ((لا - ما)(ی - سے)) = ۱/۴ قم (عہ - بہ)/۲ قم (جہ - لہ)/۲

[جم (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲ - خ جب (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲]

۱۶ — لا ما + سے ی = ۲ جم (عہ + بہ - جہ - لہ)/۲

× [جم (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲ + خ جب (عہ + بہ + جہ + لہ)/۲]

۱۷ — مساوات متماثلہ

$$(ا^2 - ب^2)(ج^2 - د^2) = (ج^2 - ب^2)(ا^2 - د^2) + (ا^2 - ج^2)(ب^2 - د^2)$$

میں ا کی بجائے جم عہ + خ جب عہ اور اسی طرح ب، ج، د کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ذیل کی مساوات متماثلہ ثابت کرو

$$جب(عہ - بہ)\ جب(جہ - لہ) = جب(عہ - لہ)\ جب(جہ - بہ) + جب(عہ - جہ)\ جب(بہ - لہ)$$

۱۸ — مساوات متماثلہ

$$\frac{(لا - ب)(لا - ج)}{(ا - ب)(ا - ج)} + \frac{(لا - ج)(لا - ا)}{(ب - ج)(ب - ا)} + \frac{(لا - ا)(لا - ب)}{(ج - ا)(ج - ب)} = ۱$$

میں لا کی بجائے جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ اور اسی طرح ا، ب اور ج کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ثابت کرو کہ

$$\frac{جب(طہ - بہ)\ جب(طہ - جہ)}{جب(عہ - بہ)\ جب(عہ - جہ)}\ جب^2(طہ - عہ) + \text{دو اور متشابہ رقوم} = ۰$$

اسی طرح سے مساوات $\frac{۱}{(لا - ا)(لا - ب)} = \frac{۱}{(ا - ب)(لا - ا)} - \frac{۱}{(ا - ب)(لا - ب)}$

سے متماثل مساواتیں مستنبط کرو

۱۹ — ثابت کرو کہ

$$(ا + ب خ)^{\frac{م}{ن}} + (ا - ب خ)^{\frac{م}{ن}} = ۲(ا^2 + ب^2)^{\frac{م}{۲ن}}\ جم\left(\frac{م}{ن}\ مس^{-۱}\frac{ب}{ا}\right)$$

۲۰ — اگر $۲\ جم\ طہ = لا + \frac{۱}{لا}$ تو ثابت کرو کہ $۲\ جم\ ر\ طہ = لا^{ر} + \frac{۱}{لا^{ر}}$

۲۱۔ اگر $۲\,\text{جم}\,\text{طہ} = \text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$ اور $۲\,\text{جم}\,\text{فہ} = \text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}$ ، ....

تو ثابت کرو کہ $۲\,\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{فہ} + \ldots) = \text{لا ما ی} \ldots + \frac{۱}{\text{لا ما ی} \ldots}$

۲۲۔ اگر $\text{لا}_{\text{ر}} = \text{جم}\,\frac{\pi}{۲^{\text{ر}}} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{۲^{\text{ر}}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}_۱ \times \text{لا}_۲ \times \text{لا}_۳ \ldots \text{تا لاتناہی} = \text{جم}\,\pi$$

۲۳۔ ڈی مائیور کے مسئلہ کو استعمال کر کے ذیل کی مساوات کو حل کرو

$$\text{لا}^۴ - \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ - \text{لا} + ۱ = ۰$$

۲۴۔ دفعہ ۲۱ میں ہم نے صرف یہ ثابت کیا ہے کہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}$$

جملہ $(\text{جم}\,\text{طہ} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\text{طہ})^{\frac{۱}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے صرف ایک قیمت ہے، باقی قیمتیں بھی آسانی سے دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$(\text{جم}\,\text{طہ} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\text{طہ})^{\frac{۱}{\text{ق}}} = \left\{\text{جم}\,(۲\text{ن}\pi + \text{طہ}) + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,(۲\text{ن}\pi + \text{طہ})\right\}^{\frac{۱}{\text{ق}}}$$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

اور موخر الذکر مقدار کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$$\text{جم}\,\frac{۲\text{ن}\pi + \text{طہ}}{\text{ق}} + \sqrt{-۱}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{ن}\pi + \text{طہ}}{\text{ق}}$$ ہے

اگر ہم ن کو سلسلہ وار ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ....(ق - ۱) کے برابر فرض کریں تو مقادیر

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{2\pi + \text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{2\pi + \text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{4\pi + \text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{4\pi + \text{ط}}{\text{ق}}\,،$$

$$\text{جم}\,\frac{6\pi + \text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{6\pi + \text{ط}}{\text{ق}} \ldots\ldots (1)$$

. . . .

میں سے ہر ایک، جملہ $(\text{جم ط} + \sqrt{-1}\,\text{جب ط})^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہوگی۔

یہ امر قابل غور ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت جو ن کو دی جاسکتی ہے وہ (ق - ۱) ہے۔ کیونکہ اگر ن کو ق، ق + ۱، ق + ۲ .... کے برابر فرض کریں تو ان سے وہی نتائج حاصل ہونگے جو ن کو بالترتیب ۰، ۱، ۲ وغیرہ کے مساوی فرض کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نیز مقادیر (۱) میں سے کوئی دو مقداریں ایک دوسرے کے مساوی نہیں کیونکہ ان میں جتنے زاوے شامل ہیں اُن میں سے کسی دو زاویوں کا فرق ہر حالت میں 2π سے کم ہے اور ظاہر ہے کہ جب دو زاویوں کا فرق 2π سے کم ہو تو یہ ناممکن ہے کہ اُن کی جیوب بھی برابر ہوں

اور جیوب التمام بھی۔

خلاصہ یہ ہے کہ جملہ

$$\text{جم}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}$$ میں ن کو

علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳، .... (ق - ۱) قیمتیں دینے سے ہم

$$\left(\text{جم ط} + \sqrt{-1}\ \text{جب ط}\right)^{\frac{1}{\text{ق}}}$$

کی ق (اور صرف ق ہی) مختلف قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں

۲۴ - اگر لا + خ ما کی شکل کی کوئی رقم دی ہوئی ہو تو ہم دفعہ ماقبل کی رو سے رقم مذکور کے کسی جذر کے واسطے مثلثی جملے معلوم کر سکتے ہیں

دفعہ ۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ لا + خ ما

$$= \text{مر}\left[\text{جم}\,(2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}) + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,(2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط})\right]$$

$$\text{جہاں مر} = +\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2}$$

اور ط ایک ایسا زاویہ ہے کہ $\text{جم ط} = \frac{\text{لا}}{\text{مر}}$ اور $\text{جب ط} = \frac{\text{ما}}{\text{مر}}$

اس لئے $(\text{لا}+\text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ق}}}$

$$\text{مر}^{\frac{1}{\text{ق}}}\left[\text{جم}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\,\frac{2\,\text{ن}\,\pi+\text{ط}}{\text{ق}}\right]\text{مر}^{\frac{1}{\text{ق}}}$$

اس میں ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ...... (ق - ۱) قیمتیں دینے سے ق مطلوبہ جذر معلوم ہوتے ہیں۔

۲۵ - مشق (۱) $\left(\text{جم}\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ کی قیمتیں معلوم کرو

$$\left(\text{جم}\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$= \left[\text{جم}\left(2\text{ن}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{-1}\ \text{جب}\left(2\text{ن}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

$$= \text{جم}\left(\frac{2\text{ن}\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{-1}\ \text{جب}\left(\frac{2\text{ن}\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳ قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ کے لئے مندرجہ ذیل رقوم حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{جم}\frac{\pi}{12} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{\pi}{12}،$$

$$\text{جم}\frac{7\pi}{12} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{7\pi}{12}،$$

$$\text{جم}\frac{13\pi}{12} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{13\pi}{12}،$$

$$\text{جم}\frac{19\pi}{12} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\frac{19\pi}{12}$$

یہ امر قابل غور ہے کہ ن کو ۴ کے برابر لینے سے رقم مذکور کی کوئی نئی (پانچویں) قیمت حاصل نہیں ہوتی کیونکہ اس حالت میں ذیل کی رقم حاصل ہوگی۔

$$\text{جم}\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{-1}\ \text{جب}\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \text{جم}\,\frac{\pi}{۱۲} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\frac{\pi}{۱۲}$$

اور یہ رقم مندرجہ بالا چار رقوم میں سے پہلی رقم ہے۔ جسکو ہم معلوم کر چکے ہیں۔

اسی طرح ن = ۵، اور ن = ۶، ن = ۷، سے، اُن چار رقوم میں سے بالترتیب دوسری تیسری اور چوتھی رقوم حاصل ہونگی۔ علیٰ ہذا القیاس

مشق ۲۔ $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ جم $\pi = -۱$ اور جب $\pi = ۰$

اسلئے $(-۱)^{\frac{۱}{۳}} = \left(\text{جم}\,\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\pi\right)^{\frac{۱}{۳}}$

$$= \left[\text{جم}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \pi) + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \pi)\right]^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \text{جم}\,\frac{۲\,\text{ن}\,\pi + \pi}{۳} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\frac{۲\,\text{ن}\,\pi + \pi}{۳}$$

ن کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، کے برابر لینے سے مطلوبہ قیمتیں حسب ذیل حاصل ہونگی۔

$\text{جم}\,\frac{\pi}{۳} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\frac{\pi}{۳}$ یعنی $\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ ،

$\text{جم}\,\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\frac{\pi}{۳}$ یعنی -۱ ،

اور $\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۳} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\,\frac{۵\pi}{۳}$ یعنی $\frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$

مشق ۳۔ ذیل کی مساوات کو حل کرو۔

$$\text{لا}^{۹} - \text{لا}^{۵} + \text{لا}^{۴} - ۱ = ۰$$

مساوات مذکورہ $= (\text{لا}^{۵} + ۱)(\text{لا}^{۴} - ۱) = ۰$

پہلے جزو ضربی سے $\text{لا}^{۵} = -۱ = \text{جم}(۲\text{ن}+۱)\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}(۲\text{ن}+۱)\pi$

اسلئے $\text{لا} = \left[\text{جم}(۲\text{ن}+۱)\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}(۲\text{ن}+۱)\pi\right]^{\frac{۱}{۵}}$

$$= \text{جم}\frac{(۲\text{ن}+۱)\pi}{۵} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\frac{(۲\text{ن}+۱)\pi}{۵}$$

ن کو حسب سابق ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$\text{جم}\ ۳۶^\circ + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۳۶^\circ$،

$\text{جم}\ ۱۰۸^\circ + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۱۰۸^\circ$،

$\text{جم}\ ۱۸۰^\circ + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۱۸۰^\circ$

$\text{جم}\ ۲۵۲^\circ + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۲۵۲^\circ$

اور $\text{جم}\ ۳۲۴^\circ + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۳۲۴^\circ$

دوسرے جزو ضربی سے $\text{لا}^{۴} = ۱ = \text{جم}\ ۲\text{ن}\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۲\text{ن}\pi$

$\therefore\ \text{لا} = \left[\text{جم}\ ۲\text{ن}\pi + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\ ۲\text{ن}\pi\right]^{\frac{۱}{۴}}$

$$= \text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{۲} + \sqrt{-۱}\ \text{جب}\frac{\text{ن}\pi}{۲}$$

اگر ن کو علی التواتر ۰، ۱، ۲، ۳، کے برابر فرض کیا جائے تو جوابات حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$۱،\ \sqrt{-۱}،\ -۱،\ -\sqrt{-۱}$

پس مساوات زیر بحث کی سب اصلیں معلوم ہوگئیں

اسئلہ ۳

ذیل کی رقوم کی سب قیمتیں معلوم کرو

۱- $۱^{\frac{۱}{۳}}$ ۲- $(-۱)^{\frac{۱}{۶}}$

۳- $(-\text{خ})^{\frac{۱}{۶}}$ ۴- $(-۱)^{\frac{۱}{۱۰}}$

۵- $(۱+\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۶}}$ ۶- $(۱+\sqrt{-۳})^{\frac{۱۱}{۳}}$

۷- $(-۱-\sqrt{-۳})^{\frac{۱}{۴}}$ ۸- $(\sqrt{۳}+\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$

۹- $(\sqrt{۳}-\sqrt{-۱})^{\frac{۲}{۵}}$ ۱۰- $۱۶^{\frac{۱}{۴}}$

۱۱- $۳۲^{\frac{۱}{۵}}$ ۱۲- $(۱+\sqrt{-۳})^{۱۰}+(۱-\sqrt{-۳})^{۱۰}$

۱۳- $\left(\text{جم}\frac{۲\pi}{۳}+\text{خ جب}\frac{۲\pi}{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل کرو جس میں مثلثی جملات شامل نہ ہوں -

۱۴- $\left(\text{جم}\frac{\pi}{۳}+\text{خ جب}\frac{\pi}{۳}\right)^{\frac{۳}{۴}}$ کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل ضرب معلوم کرو -

۱۵- ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۱۰}+۱۱\,\text{لا}^{۵}-۱=۰$ کی قیمتیں $\frac{\pm\sqrt{۵}-۱}{۲}\left[\text{جم}\frac{۲\text{ر}\pi}{۵}+\text{خ جب}\frac{۲\text{ر}\pi}{۵}\right]$ ہیں

۱۶- مساوات $\text{لا}^{۱۲}-۱=۰$ کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی کونسی اصل مساوات $\text{لا}^{۴}+\text{لا}^{۲}+۱=۰$ کو پورا کرتی ہے

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۷۔ لا^{۷} + ۱ = ۰ ۱۸ — لا^{۴} + لا^{۲} + لا^{۳} + ۱ = ۰

۱۹۔ ثابت کرو کہ $\sqrt[ن]{(۱ + ب خ)} + \sqrt[ن]{(۱ - ب خ)}$ کی ن حقیقی قیمتیں ہیں۔

اس سے $\sqrt[ن]{۱ + \sqrt{-۳}} + \sqrt[ن]{۱ - \sqrt{-۳}}$ کی حقیقی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ ایک کے ن، ن ویں جذر ایک ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۱۔ ایک کے سات ساتویں جذر معلوم کرو، اگر ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو تو ثابت کرو کہ ان جذروں کی ن ویں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ بشرطیکہ ن، ۷ کا ضعف نہ ہو۔

لیکن اگر ن، ۷ کا ضعف ہو تو مجموعہ ۷ ہوگا۔

۲۶۔ ملتف مقادیر کے لئے مسئلہ ثنائی

یہ معلوم ہے کہ اگر ن اور ے حقیقی ہوں اور ے ایک سے کم ہو تو

$$(۱ + ے)^{ن} = ۱ + ن ے + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} ے^{۲}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳} ے^{۳} + \dots\dots (۱)$$

جب ے ایک ملتف مقدار ہو (یعنی = لا + خ ما) ہو اور ن اور کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو معمولی ثبوت صادق آئیگا

اور مسئلہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہیگا۔

اگر ے ملتف ہو اور ن منفی ہو یا کسی کسر کے برابر ہو تو یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$۱ + ن\,ے + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}\,ے^{۲} + \ldots\ldots \quad (۲)$$

$(۱ + ے)^{ن}$ کی قیمتوں میں سے **ایک** قیمت ہے بشرطیکہ ے کا مقیاس یعنی $+\sqrt{ل^{۲} + م^{۲}}$ ایک سے کم ہو۔

اگر یہ مقیاس ایک کے برابر ہو تو یہ مسئلہ صرف ذیل کی صورتوں میں درست ہوگا۔

(۱) جب ن مثبت ہو اور

(۲) جب ن منفی کسر واجب ہو اور ے، -۱ کے برابر نہ ہو

اس کا ثبوت قدرے مشکل ہے اور کتاب ہذا کی وسعت سے باہر ہے۔ اسلئے ہم محض نتیجہ کو درست فرض کرلیں گے۔ طالب علم اگر چاہے تو اس مسئلہ کے متعلق مزید معلومات ہابسن کے علم مثلث دفعات ۲۱۱، ۲۱۲ سے یا کرسٹل کے الجبرا جلد دوم صفحہ ۲۶۲ سے حاصل کرسکتا ہے۔

باب سوم

جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلات
اور
جب طہ اور جم طہ کے سلسلے طہ کی قوتوں میں

۲۷ـ ڈی مائرے کے مسئلہ کی مدد سے جم ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے مثلثی تفاعیل کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہیں۔

ہمیں معلوم ہے کہ (جم ن طہ + خ جب ن طہ)
= (جم طہ + خ جب طہ)^{ن}

چونکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اسلئے مسئلہ ثنائی کی رو سے (جم طہ + خ جب طہ)^{ن} کی تفصیل درست ہوگی۔
پس تفصیل کرنے سے

جم ن طہ + خ جب ن طہ = جم^{ن} طہ + ن جم$^{ن-۱}$ طہ خ جب طہ

+ $\frac{\text{ن (ن-۱)}}{|\underline{۲}}$ جم$^{ن-۲}$ طہ خ^{۲} جب^{۲} طہ

+ $\frac{\text{ن (ن-۱)(ن-۲)}}{|\underline{۳}}$ جم$^{ن-۳}$ طہ خ^{۳} جب^{۳} طہ + ...

ب چونکہ خ^{۲} = −۱ ، خ^{۳} = −خ ، خ^{۴} = ۱　　اور خ^{۵} = خ ....

اسلئے جم ن طہ + خ جب ن طہ = جم^{ن} طہ $\frac{\text{ن(ن−۱)}}{|۲}$ جم$^{ن−۲}$ طہ جب^{۲} طہ ....

+ $\frac{\text{ن(ن−۱)(ن−۲)(ن−۳)}}{|۴}$ جم$^{ن−۴}$ طہ جب^{۴} طہ + ...

+ خ [ن جم$^{ن−۱}$ طہ جب طہ − $\frac{\text{ن(ن−۱)(ن−۲)}}{|۳}$ جم$^{ن−۳}$ طہ جب^{۳} طہ + ...]

حقیقی رقوم کو باہم مساوی کرنے سے

جم ن طہ = جم^{ن} طہ − $\frac{\text{ن(ن−۱)}}{|۲}$ جم$^{ن−۲}$ طہ جب^{۲} طہ + ... (۱)

اور غیر حقیقی (خیالی) رقوم کو برابر کرنے سے

جب ن طہ = ن جم$^{ن−۱}$ طہ جب طہ − $\frac{\text{ن(ن−۱)(ن−۲)}}{|۳}$ جم$^{ن−۳}$ طہ جب^{۳} طہ

+ $\frac{\text{ن(ن−۱)(ن−۲)(ن−۳)(ن−۴)}}{|۵}$ جم$^{ن−۵}$ طہ جب^{۵} طہ .... (۲)

اوپر کے دونوں سلسلوں کی رقوم متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔ اور انہیں سے ہر ایک سلسلہ اس وقت تک جاری رہتا ہے۔ جب تک کہ شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے ایک جزو ضربی صفر نہ ہو جائے۔ جب ایک جزو ضربی صفر ہو جاتا ہے

تو سلسلہ ختم ہو جاتا ہے۔

۲۸ — دفعہ ماقبل میں سلسلہ (۲) کو سلسلہ (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} = \frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ن ط}}$$

$$= \frac{\text{ن جم}^{\text{ن}-1}\text{ط جب ط} - \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)}{|3}\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{ط جب}^{3}\text{ط} + \ldots\ldots}{\text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-1)}{|2}\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{ط جب}^{2}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{|4}\text{جم}^{\text{ن}-4}\text{ط جب}^{4}\text{ط} + \ldots}$$

اس مساوات کی بائیں جانب کے رکن کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{جم}^{\text{ن}}$ ط پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} = \frac{\text{ن مس ط} - \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)}{|3}\text{مس}^{3}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)}{|5}\text{مس}^{5}\text{ط} \ldots +}{1 - \frac{\text{ن(ن}-1)}{|2}\text{مس}^{2}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{|4}\text{مس}^{4}\text{ط} \ldots}$$

۲۹ — جب ط اور جم ط کی قیمتیں **استقراء حسابیہ** کے طریقہ سے بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔

اس طریقہ میں خیالی مقادیر کے استعمال کی ضرورت نہیں پڑتی۔
ثبوت کے لئے فرض کرو کہ سلاسل (۱) اور (۲) ن کی کسی خاص قیمت کے واسطے درست ہیں۔

چونکہ جم(ن +۱) طہ = جم ن طہ جم طہ - جب ن طہ جب طہ

اسلئے جم ن طہ جم طہ - جب ن طہ جب طہ کی قیمت سلسلہ (۱) کو جم طہ سے ضرب دیکر اور سلسلہ (۲) کو جب طہ سے ضرب دیکر موخرالذکر حاصل ضرب کو پہلے حاصل ضرب میں سے تفریق کرنے سے معلوم ہوسکتی ہے اس حاصل تفریق کے لئے جو سلسلہ برآمد ہوتا ہے اس کی رقوم کو ترتیب دینے سے معلوم ہوگا کہ سلسلۂ محصلہ بعینہٖ وہی ہے جو سلسلہ (۱) میں ن کی بجائے (ن +۱) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جب (ن +۱) طہ کے لئے بھی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

پس ثابت ہوا کہ اگر سلاسل (۱) اور (۲) ن کی کسی ایک قیمت کے لئے درست ہوں تو لازماً ن کی اس سے بالاتر قیمت کے لئے بھی درست ہونگے۔

لیکن یہ تو ظاہر ہے کہ اگر ن = ۲ یا ۳ تو یہ سلسلے درست ہوتے ہیں، پس استقراء سے یہ سلسلے ن کی ہر قیمت کے لئے درست ہونگے۔

۳۰۔ اگر غیر مساوی زوایا کی کسی تعداد کا مجموعہ دیا ہوا ہو تو ڈی مائیور کے مسلہ سے اُنکے حاصل جمع کی جیب، یا جیب التمام یا مماس، اُن زوایا کے مماسوں کی رقوم میں معلوم ہو سکتے ہیں ہمیں معلوم ہے کہ

جم (عہ + بہ + جہ + ...) $\pm$ خ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= (جم عہ + خ جب عہ) (جم بہ + خ جب بہ) (جم جہ + خ جب جہ) ... (۱)

اب جم عہ + خ جب عہ = جم عہ (۱ + خ مس عہ)

جم بہ + خ جب بہ = جم بہ (۱ + خ مس بہ)

....

پس مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

جم (عہ + بہ + جہ + ...) + خ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ ... (۱ + خ مس عہ)(۱ + خ مس بہ)

(۱ + خ مس جہ) ....

= جم عہ جم بہ جم جہ .... [۱ + خ (مس عہ + مس بہ + مس جہ + ...)

+ خ^2 (مس عہ مس بہ + مس بہ مس جہ + ...)

+ خ^3 (مس عہ مس بہ مس جہ + مس بہ مس جہ مس لہ ...)

+ .....] .... (۲)

دفعہ ۱۳۱ حصہ اول کا طریق کتابت استعمال کرنے سے یہ مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

جم (عہ + بہ + جہ + ...) + خ جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ .... [۱ + خ ص$_1$ - ص$_2$ - خ ص$_3$ + ص$_4$ + خ ص$_5$ - ص$_6$]

پس مساوات بالا میں خیالی حصوں کو باہم مساوی رکھنے سے

جب (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ ..... (ص$_1$ - ص$_3$ + ص$_5$ - ص$_7$ ....) ... (۳)

اور حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے جم (عہ + بہ + جہ + ...)

= جم عہ جم بہ جم جہ .... (۱ - ص$_2$ + ص$_4$ - ص$_6$ + ص$_8$ ...) ... (۴)

لہٰذا عمل تقسیم سے

$$\text{مس}(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج}+\ldots) = \frac{\text{ص}_{۱} - \text{ص}_{۳} + \text{ص}_{۵} - \text{ص}_{۷} \ldots}{۱ - \text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۴} - \text{ص}_{۶} \ldots} \ldots (۵)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں بائیں جانب کے رکنوں کی علامات متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔

ربط (۵) کو استقراءِ حسابیہ سے دفعہ ۱۳۱ حصہ اول میں ثابت کیا جاچکا ہے۔

۱۳ ـــ مشق ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات $\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{ط} + \text{ب}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط} + ۲\,\text{ا}\,\text{گ}\,\text{جم}\,\text{ط} + ۲\,\text{ف}\,\text{ب}\,\text{جب}\,\text{ط} + \text{ج} = ۰$ ... ... کی چار اصلیں ہیں اور ط کی اُن قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، π نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت ضعف ہے۔

فرض کرو کہ $\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲} = \text{ت}$

اور چونکہ حصہ اول دفعہ ۱۱۱ کی رو سے $\text{جب}\,\text{ط} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ط}}{۲}}$

اور $\text{جم}\,\text{ط} = \frac{۱ - \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ط}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ط}}{۲}}$

اسلئے مساوات بالا $= \text{ا}^{۲}\left(\frac{۱-\text{ت}^{۲}}{۱+\text{ت}^{۲}}\right)^{۲} + \text{ب}^{۲}\left(\frac{۲\,\text{ت}}{۱+\text{ت}^{۲}}\right)^{۲}$

$$+ ۲\,\text{گ}\,\text{ا}\,\frac{۱-\text{ت}^{۲}}{۱+\text{ت}^{۲}} + ۲\,\text{ف}\,\text{ب}\,\frac{۲\,\text{ت}}{۱+\text{ت}^{۲}} + \text{ج} = ۰$$

یا بعد از اختصار $\text{ت}^{۴}(\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{گ}\,\text{ا} + \text{ج}) + ۴\,\text{ف}\,\text{ب}\,\text{ت}^{۳} + \text{ت}^{۲}(۴\,\text{ب}^{۲} - ۲\,\text{ا}^{۲} + ۲\,\text{ج})$

$$+\,۴\,\text{ف ب ت} + \text{ا}^{۲} + ۲\,\text{گ ا} + \text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

اس مساوات کی صریحاً چار اصلیں ہیں۔

نیز $\text{ص}_{۱}$ = اصلوں کا مجموعہ = $-\dfrac{۴\,\text{ف ب}}{\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{ا گ} + \text{ج}}$

$\text{ص}_{۲}$ = مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے = $\dfrac{۴\,\text{ب}^{۲} - ۲\,\text{ا}^{۲} + ۲\,\text{ج}}{\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{گ ا} + \text{ج}}$

$\text{ص}_{۳}$ = مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے = $-\dfrac{۴\,\text{ف ب}}{\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{ا گ} + \text{ج}}$

$\text{ص}_{۴}$ = مجموعہ چار چار اصلوں کو اکٹھا لینے سے = $\dfrac{\text{ا}^{۲} + ۲\,\text{گ ا} + \text{ج}}{\text{ا}^{۲} - ۲\,\text{گ ا} + \text{ج}}$

چونکہ $\text{ص}_{۱} = \text{ص}_{۳}$ اسلئے دفعہ ما قبل سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{مس}\left(\frac{\text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴}}{۲}\right) = \frac{\text{ص}_{۱} - \text{ص}_{۳}}{۱ - \text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۴}} = ۰ = \text{مس}\,\text{ن}\,\pi$$

اور نسب نما $۱ - \text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۴}$ صفر نہیں ہوتا جب تک کہ $\text{ا}^{۲}$، $\text{ب}^{۲}$ کے برابر نہ ہو۔

اسلئے $\text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴} = ۲ \times \text{ن}\,\pi$ نیم قطری

یعنی π نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت ضعف

[جو طالب علم ہندسۂ تحلیلیہ سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ مشق ہذا ذیل کے مسئلہ کا حل ہے " اگر ایک دائرہ اور ایک قطع ناقص ایک دوسرے کو چار نقاط پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کا کوئی جفت ضعف ہوتا ہے]

امثلہ ۴

ثابت کرو کہ

۱ — جم ۴ طہ = جم^{۴} طہ − ۶ جم^{۲} طہ جب^{۲} طہ + جب^{۴} طہ

۲ — جب ۶ طہ = ۶ جم^{۵} طہ جب طہ − ۲۰ جم^{۳} طہ جب^{۳} طہ + ۶ جم طہ جب^{۵} طہ

۳ — جب ۷ طہ = ۷ جم^{۶} طہ جب طہ − ۳۵ جم^{۴} طہ جب^{۳} طہ + ۲۱ جم^{۲} طہ جب^{۵} طہ − جب^{۷} طہ

۴ — جم ۹ طہ = جم^{۹} طہ − ۳۶ جم^{۷} طہ جب^{۲} طہ + ۱۲۶ جم^{۵} طہ جب^{۴} طہ − ۸۴ جم^{۳} طہ جب^{۶} طہ
+ ۹ جم طہ جب^{۸} طہ

۵ — جم ۸ طہ = جم^{۸} طہ − ۲۸ جم^{۶} طہ جب^{۲} طہ + ۷۰ جم^{۴} طہ جب^{۴} طہ
− ۲۸ جم^{۲} طہ جب^{۶} طہ + جب^{۸} طہ

مندرجہ ذیل کی قیمتیں مس طہ کی رقوم میں لکھو

۶ — مس ۵ طہ ۷ — مس ۷ طہ ۸ — مس ۹ طہ

۹ — ثابت کرو کہ جم ۱۱ طہ اور جب ۱۱ طہ کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب − ۱۱ جم طہ جب^{۱۰} طہ اور − جب^{۱۱} طہ ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ جب ۸ طہ اور جب ۹ طہ کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب − ۸ جم طہ جب^{۷} طہ اور جب^{۹} طہ ہیں۔

۱۱ — اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب

$(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جب^{ن} طہ اور ن $(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جم طہ جب$^{ن-۱}$ طہ ہونگی۔

۱۲ — اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو ثابت کرو کہ جب ن طہ اور جم ن طہ کی

تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب

$$ن\,(-۱)^{\frac{ن-۲}{۲}}\ \text{جم طہ جب}^{ن-۱}\text{طہ اور}\ (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\ \text{جب}^{ن}\text{طہ}$$ ہونگی۔

۱۳— اگر مساوات $لا^۳ + ف\,لا^۲ + ق\,لا + ف = ۰$ کی اصلیں عہ، بہ اور جہ ہوں تو ثابت کرو کہ سوائے ایک خاص صورت کے

$$\text{مس}^{-۱}\text{عہ} + \text{مس}^{-۱}\text{بہ} + \text{مس}^{-۱}\text{جہ} = ن\,\pi$$ نیم قطری۔

۱۴— ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{جب ۳ طہ} = ا\ \text{جب طہ} + ب\ \text{جم طہ} + ج$$

کی ۶ اصلیں ہیں اور طہ کی اُن چھ قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں π نق کے کسی طاق ضعف کے برابر ہے۔

۱۵— ثابت کرو کہ مساوات

$$ا\ \text{ھ قط طہ} - ب\ \text{ک قم طہ} = ا^۲ - ب^۲$$

کی چار اصلیں ہیں اور طہ کی جو چار قیمتیں اس مساوات کو پورا کرتی ہیں اُنکا حاصل جمع، π نق کے کسی طاق ضعف کے برابر ہے۔

۱۶— اگر طہ کی وہ تین قیمتیں جو مساوات

$$\text{مس ۲ طہ} = \text{لہ مس}\,(\text{طہ} + \text{عہ})$$

کو پورا کریں $طہ_۱$، $طہ_۲$، $طہ_۳$ ہوں اور ان میں سے کسی دو کا فرق π کا کوئی ضعف نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$طہ_۱ + طہ_۲ + طہ_۳ + \text{عہ}$$، π کا کوئی ضعف ہے۔

کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی تفصیلیں زاویہ مذکور کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں

۳۲- بموجب دفعہ ۲۷ جم ن طہ

$$\text{جم ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ جب}^{2}\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\text{طہ جب}^{4}\text{طہ} - \dots$$

اگر ن طہ کو عہ کے برابر فرض کیا جائے تو

$$\text{جم عہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ} - \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-1\right)}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ جب}^{2}\text{طہ} + \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-1\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-2\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-3\right)}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\text{طہ}\left(\text{جب}^{4}\text{طہ}\right) - \dots$$

$$= \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ} - \frac{\text{عہ}(\text{عہ}-\text{طہ})}{2!}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{2} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}-\text{طہ})(\text{عہ}-2\text{طہ})(\text{عہ}-3\text{طہ})}{4!}\,\text{جم}^{\text{ن}-4}\text{طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{4} - \dots \quad (1)$$

اس مساوات میں طہ کو لا انتہا چھوٹا بنا دو اور عہ کو مستقل رکھو جس سے ن لا انتہا بڑا بن جائے گا۔

تب $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ کی انتہا ایک ہوگی اور نیز $\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)$ کی سب قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۵)

نیز جم طہ کی انتہا بھی ایک ہوگی اور جم طہ کی دیگر قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۴)

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\text{جم عہ} = ۱ - \frac{\text{عہ}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{عہ}^{۴}}{\lfloor ۴} - \frac{\text{عہ}^{۶}}{\lfloor ۶} + \ldots\ldots \text{ تا لاانتہاہی}$$

(سلسلہ ہذا کا مقابلہ دفعہ ۱۶ کے سلسلہ سے کرو)

۳۳ — جب عہ کی تفصیل عہ کی رقوم میں

بموجب دفعہ ۲۷

$$\text{جب ن طہ} = \text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\text{ طہ جب طہ}$$

$$- \frac{\text{ن (ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳} \text{ جم}^{\text{ن}-۳}\text{ طہ جب}^{۳}\text{ طہ} + \ldots\ldots$$

حسب سابق ن طہ کو عہ کے برابر فرض کرنے سے

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\text{ جم}^{\text{ن}-۱}\text{ طہ جب طہ} - \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۱\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۲\right)}{\lfloor ۳}\text{ جم}^{\text{ن}-۳}\text{ طہ جب}^{۳}\text{ طہ}$$

$$+ \frac{\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۱\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۲\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۳\right)\left(\frac{\text{عہ}}{\text{طہ}}-۴\right)}{\lfloor ۵}\text{ جم}^{\text{ن}-۵}\text{ طہ جب}^{۵}\text{ طہ} + \ldots\ldots$$

$$= \text{عہ جم}^{\text{ن}-۱}\text{ طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right) - \frac{\text{عہ (عہ}-\text{طہ)(عہ}-۲\text{ طہ)}}{\lfloor ۳}\text{ جم}^{\text{ن}-۳}\text{ طہ}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{۳} + \ldots\ldots$$

حسب دفعہ ماقبل طہ کو لاانتہا چھوٹا بنانے اور عہ کو مستقل رکھنے سے

$$\text{جب عہ} = \text{عہ} - \frac{\text{عہ}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{عہ}^{۵}}{\lfloor ۵} - \frac{\text{عہ}^{۷}}{\lfloor ۷} + \ldots \text{ تا لاانتہا ہی}$$

[دفعہ ۱۶ سے مقابلہ کرو]

۳۴ — دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی ماتدمس طہ کے لئے

کوئی ایسا سلسلہ نہیں ہے جسکی رقوم کا تسلسل کسی آسان قانون پر مبنی ہو۔ بہر حال ہم مس ط کے لئے ایک سلسلہ ط کی پانچویں قوت تک معلوم کرینگے۔

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{ط}^{۵}}{|\underline{۵}} - }{۱ - \frac{\text{ط}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{ط}^{۴}}{|\underline{۴}} - \cdots\cdots}$$

$$= \left(\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{۶} + \frac{\text{ط}^{۵}}{۱۲۰} - \cdots\right)\left[۱ - \left(\frac{\text{ط}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ط}^{۴}}{۲۴} + \cdots\right)\right]^{-۱}$$

$$= \left(\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{۶} + \frac{\text{ط}^{۵}}{۱۲۰} - \cdots\right)\left[۱ + \left(\frac{\text{ط}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ط}^{۴}}{۲۴} + \cdots\right) + \left(\frac{\text{ط}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ط}^{۴}}{۲۴} \cdots\right)^{۲} \cdots\right]$$

مسئلہ ثنائی سے

$$= \left(\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{۶} + \frac{\text{ط}^{۵}}{۱۲۰} - \cdots\right)\left[۱ + \frac{\text{ط}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ط}^{۴}}{۲۴} \cdots + \frac{\text{ط}^{۴}}{۴} \cdots\right]$$

ط۶ اور اس سے بڑی قوتوں کو نظرانداز کرنے سے

$$= \left(\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{۶} + \frac{\text{ط}^{۵}}{۱۲۰} - \cdots\right)\left(۱ + \frac{\text{ط}^{۲}}{۲} + \frac{۵}{۲۴}\text{ط}^{۴} \cdots\cdots\right)$$

جو اختصار کرنے اور ط۵ سے اوپر کی رقوم چھوڑ دینے سے

$$= \text{ط} + \frac{\text{ط}^{۳}}{۳} + \frac{۲}{۱۵}\text{ط}^{۵}$$

اگرچہ ہم اس قاعدہ سے مس ط کے لئے سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں معلوم کرسکتے ہیں تاہم یہ سلسلہ بہت جلد دشوار اور تکلیف دہ ہو جاتا ہے۔

۳۵ — دفعات ۳۲ اور ۳۳ میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ زاویہ زیر بحث میں عدد نیم قطریوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایسا نہ ہو تو ط کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی انتہائی قیمت

ایک نہیں ہو سکتی۔

اگر زاویہ کی مقدار درجوں میں دی ہوئی ہو تو ذیل کا عمل اختیار کیا جائے گا۔

فرض کرو کہ $\text{عہ}^\circ = \text{لا}$ نیم قطری یعنی

$$\frac{\text{عہ}}{۱۸۰} = \frac{\text{لا}}{\pi} \quad \text{یعنی} \quad \text{لا} = \frac{\pi}{۱۸۰}\,\text{عہ}$$

تب $\text{جم}\,\text{عہ}^\circ = \text{جم}\,\text{لا}^{\text{نق}}$

$$= ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{|\underline{۲}} + \frac{\text{لا}^۴}{|\underline{۴}} - \frac{\text{لا}^۶}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots$$

$$= ۱ - \frac{۱}{|\underline{۲}}\,\frac{\pi^۲\,\text{عہ}^۲}{(۱۸۰)^۲} + \frac{۱}{|\underline{۴}}\,\frac{\pi^۴\,\text{عہ}^۴}{(۱۸۰)^۴} - \frac{۱}{|\underline{۶}}\,\frac{\pi^۶\,\text{عہ}^۶}{(۱۸۰)^۶} + \cdots\cdots \quad \text{لامتناہی تک}$$

اسی طرح سے

$$\text{جب}\,\text{عہ}^\circ = \text{جب}\,\text{لا}^{\text{نق}}$$

$$= \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{|\underline{۳}} + \frac{\text{لا}^۵}{|\underline{۵}} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi\,\text{عہ}}{۱۸۰} - \frac{۱}{|\underline{۳}}\left(\frac{\pi\,\text{عہ}}{۱۸۰}\right)^۳ + \frac{۱}{|\underline{۵}}\left(\frac{\pi\,\text{عہ}}{۱۸۰}\right)^۵ - \cdots\cdots \quad \text{تا لامتناہی}$$

۳۶۔ چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام

دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مدد سے چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ جب ۱۰" اور جم ۱۰" کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہو۔

$$\text{چونکہ}\ ۱۰'' = \left(\frac{۱}{۶۰\times۶} \times \frac{\pi}{۱۸۰}\right)\text{نیم قطری} = \left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^{\text{نق}}$$

$$\text{لہٰذا جب}\ ۱۰'' = \frac{\pi}{۶۴۸۰۰} - \frac{۱}{|\underline{۳}}\left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^۳ + \frac{۱}{|\underline{۵}}\left(\frac{\pi}{۶۴۸۰۰}\right)^۵ - \cdots\cdots$$

اور جم ۱۰″ $= 1 - \frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2 + \frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^4 - \frac{1}{\lfloor 6}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^6 + \cdots\cdots$

اب $\frac{\pi}{64800} = .0000484813681\ldots$

اور $\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2 = .0000000023504\ldots$

اور $\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3 = .000000000000113948\ldots$

پس اعشاریہ کے بارہویں مقام تک

جب ۱۰″ $= .000048481368$

اور جم ۱۰″ $= 1 - \frac{.0000000023504}{2}$

$= 1 - .0000000011752$

$= .9999999988248$

۳۷۔ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت

دفعہ ۳۳ کا سلسلہ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں بھی بہت کارآمد ہوتا ہے، اس قاعدہ کی بہترین تشریح چند مثالوں سے ہوسکتی ہے۔

مشق ۱۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{1349}{1350}$ تو ثابت کرو کہ زاویہ ط تقریباً $\frac{1}{15}$ نق کے مساوی ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ط جتنا چھوٹا ہوگا $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی قیمت اتنی ہی ایک کے زیادہ قریب ہوگی۔ اور چونکہ اس مشق میں $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ کی قیمت تقریباً ۱ کے مساوی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ ط بہت چھوٹا ہے۔

اگر جب ط کے سلسلہ (دفعہ ۳۳) میں ط کی تیسری قوت سے بڑی قوتیں

چھوڑ دی جائیں تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{\lfloor ۳}}{\text{ط}} = \frac{۱۳۴۹}{۱۳۵۰} = ۱ - \frac{۱}{۱۳۵۰}$$

$$\therefore \quad \text{ط}^{۲} = \frac{۶}{۱۳۵۰} = \frac{۱}{۲۲۵}$$

$$\text{پس ط} = \frac{۱}{۱۵}$$

یعنی زاویہ مطلوبہ = $\frac{۱}{۱۵}$ نق تقریباً

اگر زیادہ صحیح قیمت معلوم کرنا مقصود ہو تو سلسلہ بالا میں ط کی پانچویں قوت کو بھی شامل کر لینا چاہیئے۔

$$\text{تب} \quad \frac{\text{ط} - \frac{\text{ط}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ط}^{۵}}{\lfloor ۵}}{\text{ط}} = ۱ - \frac{۱}{۱۳۵۰}$$

$$\therefore \quad \text{ط}^{۴} - ۲۰\,\text{ط}^{۲} = -\frac{۱۲۰}{۱۳۵۰} = -\frac{۲۰}{۲۲۵}$$

حل کرنے سے $\text{ط}^{۲} = ۱۰ \pm \frac{\sqrt{۲۲۴۸۰}}{۱۵}$

$$= \frac{۱۵۰ - ۱۴۹٫۹۳۳۳۱۲۰۰۰}{۱۵} = \frac{٫۰۶۶۶۸۸}{۱۵}$$

$$= \frac{۱٫۰۰۰۳۲}{۱۵^{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{ط} = \frac{۱٫۰۰۰۱۶}{۱۵} \text{ نیم قطری}$$

اس قیمت اور پہلی قیمت کا فرق تقریباً پہلی قیمت کے $\frac{۱}{۶۰۰۰}$ ویں حصہ کے مساوی ہے۔

مشق ۲ — ذیل کی مساوات کا تقریبی حل معلوم کرو۔

$$\text{جم}\left(\frac{\pi}{۳} + \text{ط}\right) = ٫۴۹$$

صریحاً ٫۴۹ ، $\frac{۱}{۲}$ کے تقریباً مساوی ہے اور چونکہ $\frac{۱}{۲}$ ، جم $\frac{\pi}{۳}$ کی پوری قیمت

ہے اس لئے لازماً ط کی قیمت بہت چھوٹی ہوگی۔

مساوات مذکورہ اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{جم}\,ط - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{جب}\,ط = 0.49 = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

پہلی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے ط کا مربع اور مربع سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

تب دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ مساوات

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ط = \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$$

$$\text{جس سے } ط = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{100} = \frac{2\sqrt{3}}{300} = \frac{3.4641\ldots}{300}$$

$$= 0.011547\ldots \text{ نیم قطری}$$

اس سے زیادہ صحیح تقریبی قیمت معلوم کرنے کے واسطے ط کی تیسری قوت اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا چاہیئے۔

اس صورت میں مساوات (۱) ہو جائے گی:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{ط^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ط = \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$$

$$\text{یعنی} \quad ط^2 + 2\sqrt{3}\,ط = \frac{4}{100}$$

$$\therefore \quad ط = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{304}}{10} = \ldots 0.0115086\ldots \text{ نیم قطری}$$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چوتھے مقام تک درست ہے لہٰذا زاویہ ط تقریباً ۰٫۰۱۱۵ نیم قطری یعنی ۴۰َ کے مساوی ہے۔

جدولوں کی رُو سے درست جواب ۰٫۰۱۱۵۰۷۵... نیم قطری ہے۔

۳ - بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا

اکثر اوقات ہمیں ایسی مقادیر کی قیمت معلوم کرنی پڑتی ہے جو بظاہر
یر متعین ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{۳ جب ط} - \text{جب ۳ ط}}{\text{ط (جم ط} - \text{جم ۳ ط)}}$$

ں قیمت معلوم کرنا مطلوب ہے جہاں ط صفر ہے۔

اگر ہم جملۂ ہذا میں ط کی جگہ صفر رکھیں تو یہ

$$= \frac{۰ - ۰}{۰ \times ۰}$$

و بظاہر غیر متعین ہے۔

تاہم ط کی تمام قیمتوں کے لیے مذکورہ بالا جملہ

$$\frac{\text{۳ جب ط} - (\text{۳ جب ط} - \text{۴ جب}^{۳}\text{ ط})}{\text{ط} \{\text{جم ط} - (\text{۴ جم}^{۳}\text{ ط} - \text{۳ جم ط})\}} = \frac{\text{۴ جب}^{۳}\text{ ط}}{\text{ط} \{\text{۴ جم ط} - \text{۴ جم}^{۳}\text{ ط}\}}$$

$$= \frac{\text{جب}^{۳}\text{ ط}}{\text{ط جم ط جب}^{۲}\text{ ط}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط جم ط}} = \frac{۱}{\text{جم ط}} \times \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$$

اب ط جتنا چھوٹا ہوگا اتنا ہی $\frac{۱}{\text{جم ط}}$ اور $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ دونوں کی
قیمتیں ایک کے قریب ہونگی۔

اسلیئے جس وقت ط کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے اس وقت
مندکرہ بالا جملہ کی انتہائی قیمت ۱×۱ یعنی ۱ ہو جاتی ہے۔

اس قسم کی رقم کو جسکا ہم نے ابھی اوپر ذکر کیا ہے غیر متعین رقم کہتے ہیں، یہہ کہنا شاید

زیادہ درست ہوگا کہ مذکورہ بالا جملہ صرف بادی النظر میں غیر متعین ہے ۔

۳۹ ۔ جب طہ اور جم طہ کے سلسلوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کے بہت سے جملوں کی اصلی قیمت نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے ۔
اس قاعدہ کی توضیح کے لئے چند مشقیں ذیل میں درج کی جاتی ہیں ۔
دفعہ ماقبل کی مثال ذیل کی پہلی مشق کی ایک خاص صورت ہے ۔

مشق ۱ ۔ اگر طہ صفر ہو تو ذیل کے جملہ کی قیمت معلوم کرو

$$\frac{\text{ن جب طہ} - \text{جب ن طہ}}{\text{طہ}\,(\text{جم طہ} - \text{جم ن طہ})}$$

$$\text{جملہ مذکورہ} = \frac{\text{ن}\left(\text{طہ} - \frac{\text{طہ}^3}{|\underline{3}} + \frac{\text{طہ}^5}{|\underline{5}} - \dots\right) - \left(\text{ن طہ} - \frac{\text{ن}^3\text{طہ}^3}{|\underline{3}} + \frac{\text{ن}^5\text{طہ}^5}{|\underline{5}} - \dots\right)}{\text{طہ}\left[\left(1 - \frac{\text{طہ}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{طہ}^4}{|\underline{4}} - \dots\right) - \left(1 - \frac{\text{ن}^2\text{طہ}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{ن}^4\text{طہ}^4}{|\underline{4}} - \dots\right)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{|\underline{3}}\,\text{طہ}^3 - \frac{\text{ن}^5 - \text{ن}}{|\underline{5}}\,\text{طہ}^5 + \text{طہ کی بڑی قوتیں}}{\text{طہ}\left[\frac{\text{ن}^2 - 1}{|\underline{2}}\,\text{طہ}^2 - \frac{\text{ن}^4 - 1}{|\underline{4}}\,\text{طہ}^4 + \text{طہ کی بڑی قوتیں}\right]}$$

$$= \frac{\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{|\underline{3}} - \frac{\text{ن}^5 - \text{ن}}{|\underline{5}}\,\text{طہ}^2 + \text{طہ کی بڑی قوتیں}}{\frac{\text{ن}^2 - 1}{|\underline{2}} - \frac{\text{ن}^4 - 1}{|\underline{4}}\,\text{طہ}^2 + \text{طہ کی بڑی قوتیں}}$$

اگر طہ صفر ہو جائے تو یہ رقم

$$= \frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{|\underline{3}} \div \frac{\text{ن}^2 - 1}{|\underline{2}} = \frac{\text{ن}}{3}$$

مشق ۲ ۔ اگر لا صفر ہو جائے تو جملہ

$$\frac{\text{جم لا} - \text{لوک}_{\text{و}}(1 + \text{لا}) + \text{جب لا} - 1}{\text{و لا} - (1 + \text{لا})}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

چونکہ $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{لا}^{\text{۴}} + \cdots\cdots$

اور $\text{و}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{|\underline{\text{۳}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{|\underline{\text{۴}}} + \cdots\cdots$ (دفعات ۵ اور ۸)

اسلئے یہ جملہ $= \dfrac{\left(\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{|\underline{\text{۴}}} - \cdots\right) - \left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \cdots\right) + \left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{|\underline{\text{۳}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{|\underline{\text{۵}}}\cdots\right) - \text{۱}}{\left(\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{|\underline{\text{۳}}} + \cdots\cdots\right) - (\text{۱} + \text{لا})}$

$= \dfrac{-\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}{\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}} = \dfrac{-\frac{\text{لا}}{|\underline{\text{۲}}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}{\frac{\text{۱}}{|\underline{\text{۲}}} + \text{لا کی بڑی قوتیں}}$

اگر لا صفر ہو تو یہ $= \frac{\text{۰}}{} = \text{۰}$

مشق ۳۔ اگر لا صفر ہو جائے تو

$\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}$ کی قیمت معلوم کرو

اگر لا صفر ہو جائے تو یہ رقم $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)^{\text{حد}}$ کی شکل اختیار کر لیتی ہے

نیز یہ رقم $= \left(\dfrac{\text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \cdots\cdots}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}$ (دفعہ ۳۴)

اب بموجب نتیجہ صریح دفعہ ۲ $\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۳}}\right)^{\frac{\text{۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}$ کی قیمت و ہوتی ہے جب لا صفر ہو

لہذا رقم مذکور $= \text{و}^{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}} = \text{و}^{\text{۰}} = \text{۱}$

جملہ زیر بحث کی قیمت اس کا لوکارتم معلوم کرنے سے بھی حاصل کیجا سکتی ہے۔

امثلہ ۵

۱۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{۱۰۱۳}}{\text{۱۰۱۴}}$ تو ثابت کرو کہ

ط تقریباً نیم قطریوں کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جو ۴° ۴۲′ میں ہیں۔

۲۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{863}{864}$ تو ثابت کرو کہ
ط تقریباً ۴° ۴۷′ کے برابر ہے۔

۳۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{5045}{5046}$ تو ثابت کرو کہ
زاویہ ط تقریباً ۱° ۵۸′ کے برابر ہے۔

۴۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{2165}{2166}$ تو ثابت کرو کہ
زاویہ ط تقریباً ۳° ۱′ کے برابر ہے۔

۵۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{19493}{19494}$ تو ثابت کرو کہ
ط کی تقریبی قیمت ۱° ہے۔

۶۔ اگر مس ط = $\frac{1}{15}$ ، تو ط کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اگر لا صفر ہو جائے تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ $\frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}^3}$

۸۔ $\frac{\text{لا}^2}{1 - \text{جم م لا}}$

۹۔ $\frac{\text{جب ا لا}}{\text{جب ب لا}}$

۱۰۔ $\frac{\text{مس لا} - \text{جب لا}}{\text{جب}^3\text{ لا}}$

۱۱۔ $\frac{\text{مس ۲لا} - 2\,\text{جب لا}}{\text{لا}^3}$

۱۲۔ $\frac{\text{سہ ا لا}}{\text{سہ ب لا}}$ (نوٹ) سہ سے مراد سہم الجیب یعنی جیب معکوس ہے)

۱۳۔ $\frac{\text{م جب لا} - \text{جب م لا}}{\text{م}\,(\text{جم لا} - \text{جم م لا})}$

۱۴ـ $\dfrac{\text{ا}^{۲}\text{ جب الا} - \text{ب}^{۲}\text{ جب ب لا}}{\text{ب}^{۲}\text{ مس الا} - \text{ا}^{۲}\text{ مس ب لا}}$

۱۵ـ $\dfrac{\text{ب}^{۲}\text{ جب}^{۲}\text{ الا} - \text{ا}^{۲}\text{ جب}^{۲}\text{ ب لا}}{\text{ب}^{۲}\text{ مس}^{۲}\text{ الا} - \text{ا}^{۲}\text{ مس}^{۲}\text{ ب لا}}$

۱۶ـ $\dfrac{\text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ (۱ + لا)}}{\text{۱ - جم لا}}$

۱۷ـ $\dfrac{\text{و}^{\text{لا}}\text{ - ۱ + لوک}_{\text{و}}\text{ (۱ - لا)}}{\text{جب}^{۳}\text{ لا}}$

۱۸ـ $\dfrac{\text{لا + ۲ جب لا - جب ۳ لا}}{\text{لا + مس لا - مس ۲ لا}}$

۱۹ـ $\dfrac{\text{جب لا + جب ۶ لا - ۷ لا}}{\text{لا}^{۵}}$

۲۰ـ $\dfrac{\text{جب}^{۲}\text{ ن لا - جب}^{۲}\text{ م لا}}{\text{۱ - جم ن لا}}$

۲۱ـ $\dfrac{۱}{\text{لا}^{۳}}\left[\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \dfrac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{۲ لا}} - ۲\right]$

۲۲ـ $\dfrac{\text{جب}^{۲}\text{ }\tfrac{۱}{۲}\overline{\text{م ن}}\text{ لا - جب م لا جب ن لا}}{\text{(۱ - جم م لا) (۱ - جم ن لا)}}$

۲۳ـ $\dfrac{\text{۳ جب لا - جب ۳ لا}}{\text{لا - جب لا}}$

۲۴ـ $\dfrac{\left(\text{جب لا - ۲ جب }\tfrac{\text{لا}}{۲}\right)^{۲} - \text{(۱ - جم لا)}^{۳}}{\text{جب لا جب ۲ لا - ۸ جم لا جب}^{۲}\text{ }\tfrac{\text{لا}}{۲} - \tfrac{۴}{۳}\text{ جب}^{۳}\text{ لا}}$

۲۵ـ $\dfrac{\text{ا}^{\text{لا}} - \text{ب}^{\text{لا}}}{\text{لا}}$

۲۶ـ $\left(\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{۳}{\text{لا}^{۲}}}$

۲۷ — $\left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{۴}} + \text{جب}\,\frac{\text{۳ لا}}{\text{۴}}\right)^{\text{لا}^{\text{۲}}}$

اگر لا $\frac{\pi}{\text{۲}}$ کے مساوی ہو تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو:

۲۸ — $\dfrac{(\text{جم لا} + \text{جب ۲ لا} + \text{جم ۳ لا})^{\text{۲}}}{(\text{جب لا} + \text{۲ جم ۲ لا} - \text{جب ۳ لا})^{\text{۳}}}$

۲۹ — $(\text{جب لا})^{\text{مس لا}}$

۳۰ — قط لا − مس لا

اگر ن لا انتہا بڑا ہو تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو:۔

۳۱ — $\left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ ۳۲ — $\left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^{\text{۲}}}$ ۳۳ — $\left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^{\text{۳}}}$

۳۴ — اگر ن > ۱ اور طہ = $\frac{\pi}{\text{۲}}$ تقریباً تو ثابت کرو کہ $(\text{جب طہ})^{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}}$ کی تقریبی قیمت

$$\frac{(\text{ن}-\text{۱}) + (\text{ن}+\text{۱})\,\text{جب طہ}}{(\text{ن}+\text{۱}) + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{جب طہ}}$$ ہو گی

۳۵ — اگر بہ کی قیمت انتہائی صورت میں عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{عہ جب بہ} - \text{بہ جب عہ}}{\text{عہ جم بہ} - \text{بہ جم عہ}} = \text{مس}\,(\text{عہ} - \text{مس}^{-\text{۱}}\,\text{عہ})$$

۳۶ — ثابت کرو کہ $\text{۴ مس}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{۱}}{\text{۵}} - \frac{\pi}{\text{۴}} = \text{مس}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{۱}}{\text{۲۳۹}}$

اور اس سے حاصل کرو کہ اگر ایک قائم الزاویہ مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ج ا، ج ب کا پانچ گنا ہو تو زاویہ ا زاویہ قائمہ کے $\frac{\text{۱}}{\text{۸}}$ سے بقدر ۳′ ، ۲۶″ کے بڑا ہوگا جب موخر الذکر اعداد کی صحت کو قریب ترین ثانیہ تک ملحوظ رکھا جائے۔

٣٧۔ ا اور ب کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ جملہ ا جب لا + ب جب ٢ لا کی قیمت ایک چھوٹے زاویہ لا کے نیمقطریوں کی تعداد کے اتنی قریب ہو جتنی کہ ممکن ہے۔

٣٨۔ اگر ما = لا − ر جب لا جہاں ر ایک نہایت چھوٹی مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\text{ما}}{٢} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{٢}\left(١ - \text{ر} + \text{ر}^{٢}\,\text{جب}^{٢}\,\frac{\text{لا}}{٢}\right)$$

اور

$$\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{٢} = \text{مس}\,\frac{\text{ما}}{٢}\left(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢}\,\text{جم}^{٢}\,\frac{\text{ما}}{٢}\right)$$

جہاں ر کی دو سے بڑی قوتیں نظر انداز کردی گئی ہیں۔

٣٩۔ اگر مساوات جب (سہ − طہ) = جب سہ جم عہ میں طہ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ اس کی تقریبی قیمت

$$٢\,\text{مس سہ جب}^{٢}\,\frac{\text{عہ}}{٢}\left(\text{مس}^{٢}\,\text{سہ جب}^{٢}\,\frac{\text{عہ}}{٢}\right)$$

ہوگی۔

٤٠۔ اگر جب فہ کی قیمت سے یہ معلوم ہو کہ زاویہ فہ، ١٥° سے بڑا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ اس کی قیمت اور کسر

$$\frac{٢٨\,\text{جب}\,٢\,\text{فہ} + \text{جب}\,٤\,\text{فہ}}{١٢\,(٣ + ٢\,\text{جم}\,٢\,\text{فہ})}$$

کی قیمت میں تفاوت ١ کے نیمقطریوں کی تعداد سے کم ہے۔

٤١۔ مشق۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$٨\,\text{لا}^{٣} - ٤\,\text{لا}^{٢} - ٤\,\text{لا} + ١ = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

کی اصلیں جم $\frac{\pi}{٧}$، جم $\frac{٣\pi}{٧}$، جم $\frac{٥\pi}{٧}$ ہیں۔

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$\text{جم}\,\frac{\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} = \frac{۱}{۲}$ .... (۲)

$\text{جم}\,\frac{\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} + \text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{۷} = -\frac{۱}{۴}$ ...... (۳)

اور $\text{جم}\,\frac{\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۷}\,\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۷} = -\frac{۱}{۸}$ .... (۴)

پہلا طریقہ ـ فرض کرو کہ $\text{م} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$، جہاں طہ کی قیمت ذیل کی مقادیر میں سے کوئی ایک ہے

$\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۳\pi}{۷}$، $\frac{۵\pi}{۷}$، π، $\frac{۹\pi}{۷}$، $\frac{۱۱\pi}{۷}$ اور $\frac{۱۳\pi}{۷}$

تب $\text{م}^{۷} = \text{جم ۷ طہ} + \text{خ جب ۷ طہ} = -۱$

یعنی $(\text{م}+۱)(\text{م}^{۶} - \text{م}^{۵} + \text{م}^{۴} - \text{م}^{۳} + \text{م}^{۲} - \text{م} + ۱) = ۰$

اب اصل م = −۱ طہ کی قیمت π کے متناظر ہے۔

پس مساوات

$\text{م}^{۶} - \text{م}^{۵} + \text{م}^{۴} - \text{م}^{۳} + \text{م}^{۲} - \text{م} + ۱ = ۰$ .... (۵)

کی اصلیں جم طہ + خ جب طہ ہیں جہاں طہ کی قیمت مقادیر ذیل میں سے کوئی ایک ہے

$\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۳\pi}{۷}$، $\frac{۵\pi}{۷}$، $\frac{۹\pi}{۷}$، $\frac{۱۱\pi}{۷}$، $\frac{۱۳\pi}{۷}$

۲ لا کو $\text{م} + \frac{۱}{\text{م}}$ کے مساوی رکھو

تب $۲\,\text{لا} = \text{م} + \frac{۱}{\text{م}} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} + \frac{۱}{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}$

$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} + \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ} = ۲\,\text{جم طہ}$

پس $\text{م}^{۲} + \frac{۱}{\text{م}^{۲}} = \left(\text{م} + \frac{۱}{\text{م}}\right)^{۲} - ۲ = ۴\,\text{لا}^{۲} - ۲$

اور $\left(\text{م}^{۳} + \frac{۱}{\text{م}^{۳}}\right) = \left(\text{م} + \frac{۱}{\text{م}}\right)\left\{\left(\text{م} + \frac{۱}{\text{م}}\right)^{۲} - ۳\right\} = ۸\,\text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا}$

مساوات (۵) کو ما^{۳} پر تقسیم کرنے سے

$$\text{ما}^{۳} + \frac{۱}{\text{ما}^{۳}} - \left(\text{ما}^{۲} + \frac{۱}{\text{ما}^{۲}}\right) + \left(\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}\right) - ۱ = ۰$$

یعنی ۸ لا^{۳} − ۴ لا^{۲} − ۴ لا + ۱ = ۰ .... (۶)

اس مساوات کی اصلیں

جم $\frac{\pi}{۷}$، جم $\frac{۳\pi}{۷}$، جم $\frac{۵\pi}{۷}$، جم $\frac{۹\pi}{۷}$، جم $\frac{۱۱\pi}{۷}$، جم $\frac{۱۳\pi}{۷}$

ہیں اور چونکہ

جم $\frac{۱۳\pi}{۷}$ = جم $\frac{\pi}{۷}$، جم $\frac{۱۱\pi}{۷}$ = جم $\frac{۳\pi}{۷}$ اور جم $\frac{۹\pi}{۷}$ = جم $\frac{۵\pi}{۷}$

اس لئے مساوات (۶) کی اصلیں

جم $\frac{\pi}{۷}$، جم $\frac{۳\pi}{۷}$ اور جم $\frac{۵\pi}{۷}$ ہیں۔

تب صریحاً

جم $\frac{\pi}{۷}$ + جم $\frac{۳\pi}{۷}$ + جم $\frac{۵\pi}{۷}$ = $\frac{۴}{۸}$ = $\frac{۱}{۲}$

جم $\frac{\pi}{۷}$ جم $\frac{۳\pi}{۷}$ + جم $\frac{۳\pi}{۷}$ جم $\frac{۵\pi}{۷}$ + جم $\frac{۵\pi}{۷}$ جم $\frac{\pi}{۷}$ = $-\frac{۴}{۸}$ = $-\frac{۱}{۲}$

اور جم $\frac{\pi}{۷}$ جم $\frac{۳\pi}{۷}$ جم $\frac{۵\pi}{۷}$ = $-\frac{۱}{۸}$

دوسرا طریقہ

مساوات (جم طہ + خ جب طہ)^{۷} = −۱ .... (۷)

یعنی جم ۷ طہ + خ جب ۷ طہ = −۱

طہ کی مندرجہ ذیل قیمتوں میں سے ہر ایک سے پوری ہوتی ہے

$\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۳\pi}{۷}$، $\frac{۵\pi}{۷}$، π، $\frac{۹\pi}{۷}$، $\frac{۱۱\pi}{۷}$، $\frac{۱۳\pi}{۷}$ .... (۸)

اگر ہم جب طہ کی بجائے ج اور جم طہ کی بجائے م لکھیں اور مساوات (۷) کو

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$\text{م}^{7} + 7\,\text{خ}\,\text{م}^{6}\,\text{ج} - 21\,\text{م}^{5}\,\text{ج}^{2} - 35\,\text{خ}\,\text{م}^{4}\,\text{ج}^{3} + 35\,\text{م}^{3}\,\text{ج}^{4} + 21\,\text{خ}\,\text{م}^{2}\,\text{ج}^{5} - 7\,\text{م}\,\text{ج}^{6} - \text{خ}\,\text{ج}^{7} = -1$$

اس مساوات کی دونو جانبوں کے حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے

$$\text{م}^{7} - 21\,\text{م}^{5}\,\text{ج}^{2} + 35\,\text{م}^{3}\,\text{ج}^{4} - 7\,\text{م}\,\text{ج}^{6} = -1$$

چونکہ $\text{ج}^{2} = 1 - \text{م}^{2}$، اس لئے ظاہر ہے کہ زوایا (۸) میں سے ہر ایک کی جیب التمام ذیل کی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

$$64\,\text{م}^{7} - 112\,\text{م}^{5} + 56\,\text{م}^{3} - 7\,\text{م} + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$(\text{م}+1)\left\{8\,\text{م}^{3} - 4\,\text{م}^{2} - 4\,\text{م} + 1\right\}^{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

لیکن

$$\text{جم}\,\pi = -1،\quad \text{جم}\,\frac{13\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{\pi}{7}،\quad \text{جم}\,\frac{11\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{3\pi}{7}$$

اور $\text{جم}\,\frac{9\pi}{7} = \text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$

اس لئے مساوات (۱۰) کی اصلیں

$$-1،\ \text{جم}\,\frac{\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{3\pi}{7}،\ \text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$$

ہیں جہاں آخر کی تین اصلیں دو دو دفعہ آتی ہیں۔

اس لئے $\text{جم}\,\frac{\pi}{7}$، $\text{جم}\,\frac{3\pi}{7}$، $\text{جم}\,\frac{5\pi}{7}$،

مساوات $8\,\text{م}^{3} - 4\,\text{م}^{2} - 4\,\text{م} + 1 = 0$

کی اصلیں ہیں اور یہ مساوات وہی ہے جو مساوات (۶) ہے۔
باب مابعد میں دفعہ ۹۴ کی مساوات (۲) میں ن کی بجائے ۷ لکھنے سے بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

تیسرا طریقہ۔

اگر زاویوں کی کم تعداد کو شریک کیا جائے تو مساوات (۶) خیالی مقادیر کے

استعمال کے بغیر بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ طہ زوایائے (۸) میں سے کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہے
یعنی ۷ طہ، π کا کوئی طاق ضعف ہے۔

∴ جم ۴ طہ = − جم ۳ طہ

پس اگر جم طہ کی بجائے م لکھیں تو

۲ {۲ م² − ۱} − ۱ = − {۴ م³ − ۳ م}

یعنی ۸ م⁴ − ۸ م² + ۱ = ۳ م − ۴ م³

یا ۸ م⁴ + ۴ م³ − ۸ م² − ۳ م + ۱ = ۰

یا (م + ۱) (۸ م³ − ۴ م² − ۴ م + ۱) = ۰

لہذا طریقۂ دوم کے عمل کے بموجب

مساوات ۸ م³ − ۴ م² − ۴ م + ۱ = ۰

کی اصلیں جم π/۷، جم ۳π/۷ اور جم ۵π/۷ ہیں۔

۱۴۔ دفعۂ ماقبل کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات حاصل کر سکتے ہیں
جس کی اصلیں

قط² π/۷، قط² ۳π/۷، قط² ۵π/۷

ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۶) میں ۱/لا² کو م کے اور
بنابریں لا کو ۱/م کے برابر فرض کرو تب فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے
کہ

قط² π/۷، قط² ۳π/۷، قط² ۵π/۷

مساوات $\frac{۸}{\text{ماماما}} - \frac{۴}{\text{ما}} - \frac{۴}{\text{ماما}} + ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں یا مساوات کو ناطق بنانے سے $\text{ما}^۳ - ۲۴\,\text{ما}^۲ + ۸۰\,\text{ما} - ۶۴ = ۰$ ......(۱)
کی اصلیں ہیں۔

اب ما کو ۱ + ی کے برابر فرض کرو تب چونکہ $\text{قط}^۲\,\text{ط} = ۱ + \text{مس}^۲\,\text{ط}$
اسلئے

$$\text{مس}^۲ \frac{\pi}{۷}،\ \text{مس}^۲ \frac{۳\pi}{۷}،\ \text{مس}^۲ \frac{۵\pi}{۷}$$

مساوات $(۱+\text{ی})^۳ - ۲۴(۱+\text{ی})^۲ + ۸۰(۱+\text{ی}) - ۶۴ = ۰$

یعنی $\text{ی}^۳ - ۲۱\,\text{ی}^۲ + ۳۵\,\text{ی} - ۷ = ۰$ ......(۲)
کی اصلیں ہیں۔

مساوات (۲) براہ راست بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔
کیونکہ اگر ط ذیل کے زاویوں

$$\frac{\pi}{۷}،\ \frac{۲\pi}{۷}،\ \frac{۳\pi}{۷}،\ \frac{۴\pi}{۷}،\ \frac{۵\pi}{۷}،\ \frac{۶\pi}{۷}،\ \pi$$

میں سے کسی ایک کو تعبیر کرے تو $\text{مس}\,۷\,\text{ط} = ۰$۔

یعنی (اگر مس ط کو ت سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۳۰ کی رو سے

$$۷\,\text{ت} - {}_{۷}\text{ج}_{۳}\,\text{ت}^۳ + {}_{۷}\text{ج}_{۵}\,\text{ت}^۵ - {}_{۷}\text{ج}_{۷}\,\text{ت}^۷ = ۰$$

یا $\text{ت}^۷ - ۲۱\,\text{ت}^۵ + ۳۵\,\text{ت}^۳ - ۷\,\text{ت} = ۰$

یا $\text{ت}\left\{\text{ت}^۶ - ۲۱\,\text{ت}^۴ + ۳۵\,\text{ت}^۲ - ۷\right\} = ۰$ ......(۳)

لیکن چونکہ $\text{مس}\,\pi = ۰$، $\text{مس}\,\frac{۶\pi}{۷} = -\text{مس}\,\frac{\pi}{۷}$، $\text{مس}\,\frac{۵\pi}{۷} = -\text{مس}\,\frac{۲\pi}{۷}$
اور $\text{مس}\,\frac{۴\pi}{۷} = -\text{مس}\,\frac{۳\pi}{۷}$
اسلئے مساوات (۳) کی اصلیں

$۰،\ \pm\text{مس}\,\frac{\pi}{۷}،\ \pm\text{مس}\,\frac{۳\pi}{۷}،\ \pm\text{مس}\,\frac{۵\pi}{۷}$ ہیں۔

پس $ت^۲$ کو ی کے مساوی رکھنے سے

$مس^۲ \frac{\pi}{۷}$ ، $مس^۲ \frac{۳\pi}{۷}$ ، $مس^۲ \frac{۵\pi}{۷}$

مساوات (۲) کی اصلیں ہیں۔

امثلہ ۶

۱۔ ثابت کرو کہ

$$(لا-۲جم\frac{۲\pi}{۵})(لا-۲جم\frac{۴\pi}{۵})(لا-۲جم\frac{۶\pi}{۵})(لا-۲جم\frac{۸\pi}{۵})$$
$$= لا^۴+۲لا^۳-لا^۲-۲لا+۱$$

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۸لا^۳+۴لا^۲-۴لا-۱=۰$$

کی اصلیں $جم\frac{۲\pi}{۷}$ ، $جم\frac{۴\pi}{۷}$ ، $جم\frac{۶\pi}{۷}$ ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ

$جب\frac{۲\pi}{۷}$ ، $جب\frac{۴\pi}{۷}$ ، $جب\frac{۸\pi}{۷}$

مساوات $لا^۳-\frac{\sqrt{۷}}{۲}لا^۲+\frac{\sqrt{۷}}{۸}=۰$ کی اصلیں ہیں۔

ثابت کرو کہ

$$۴- \frac{۱}{۴-قط^۲\frac{۲\pi}{۷}}+\frac{۱}{۴-قط^۲\frac{۴\pi}{۷}}+\frac{۱}{۴-قط^۲\frac{۶\pi}{۷}}=۱$$

$$۵- جم^۴\frac{\pi}{۹}+جم^۴\frac{۲\pi}{۹}+جم^۴\frac{۳\pi}{۹}+جم^۴\frac{۴\pi}{۹}=\frac{۱۹}{۱۶}$$

$$۶- قط^۴\frac{\pi}{۹}+قط^۴\frac{۲\pi}{۹}+قط^۴\frac{۳\pi}{۹}+قط^۴\frac{۴\pi}{۹}=۱۱۲۰$$

$$۷- جم\frac{\pi}{۱۱}+جم\frac{۳\pi}{۱۱}+جم\frac{۵\pi}{۱۱}+جم\frac{۷\pi}{۱۱}+جم\frac{۹\pi}{۱۱}=\frac{۱}{۲}$$

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$\text{مس}^2 \frac{\pi}{11}$، $\text{مس}^2 \frac{2\pi}{11}$، $\text{مس}^2 \frac{3\pi}{11}$، $\text{مس}^2 \frac{4\pi}{11}$، $\text{مس}^2 \frac{5\pi}{11}$

ہیں۔ [نوٹ۔ دفعہ ۳۰ کی مساوات (۳) سے شروع کرو]

ثابت کرو کہ

۹۔ $\text{مم}^2 \frac{\pi}{11} + \text{مم}^2 \frac{2\pi}{11} + \text{مم}^2 \frac{3\pi}{11} + \text{مم}^2 \frac{4\pi}{11} + \text{مم}^2 \frac{5\pi}{11} = 15$

۱۰۔ $\text{قط}^2 \frac{\pi}{11} + \text{قط}^2 \frac{2\pi}{11} + \text{قط}^2 \frac{3\pi}{11} + \text{قط}^2 \frac{4\pi}{11} + \text{قط}^2 \frac{5\pi}{11} = 60$

۱۱۔ $\text{جم} \frac{2\pi}{13} + \text{جم} \frac{6\pi}{13} + \text{جم} \frac{18\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$

۱۲۔ $\text{جم} \frac{10\pi}{13} + \text{جم} \frac{14\pi}{13} + \text{جم} \frac{22\pi}{13} = \frac{-\sqrt{13}-1}{4}$

۱۳۔ $\text{جم} \frac{\pi}{15} + \text{جم} \frac{7\pi}{15} + \text{جم} \frac{11\pi}{15} + \text{جم} \frac{13\pi}{15} = -\frac{1}{2}$

۱۴۔ ثابت کرو کہ $\text{جب} \frac{\pi}{14}$ ذیل کی مساوات کی ایک اصل ہے

$64\,\text{لا}^6 - 80\,\text{لا}^4 + 24\,\text{لا}^2 - 1 = 0$

باب چہارم

کسی زاویہ کے اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کے پھیلاؤ
اور
جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں

[پہلی خواندگی کے وقت طالب علم دفعہ ۴۸ سے باب ہذا کے اختتام تک چھوڑ سکتا ہے]

۴۲ — اس باب میں پہلے ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح سے کسی زاویہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں اس زاویہ کے اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کی جا سکتی ہیں اور پھر یہ بتائینگے کہ کس طرح سے ایک زاویہ کے کسی ضعف کی جیوب اور جیوب التمام کو زاویہ مذکورہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کے سلسلوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اس باب میں ن سے ہر جگہ ایک مثبت صحیح عدد مراد لی جائیگی۔

۴۳ — فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$$

پس

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}} = \frac{(\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})}{\text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{جب}^2\,\text{طہ}}$$

$$= \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}$$

اسلئے

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = 2\,\text{جم طہ}$$

اور $\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}} = ۲\,\text{خ جب ط}$

نیز ڈی مائیور کے مسئلہ سے ثابت ہے کہ

$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{جم ن ط} + \text{خ جب ن ط}$

$\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \text{جم ن ط} - \text{خ جب ن ط}$

لہٰذا $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{جم ن ط}$

اور $\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{خ جب ن ط}$

۴۴- $\text{جم}^{\text{ن}}$ ط کی تفصیل ط کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

اس جگہ ن سے مراد کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

دفعۂ ماسبق سے ظاہر ہے کہ

$$(۲\,\text{جم ط})^{\text{ن}} = \left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\frac{1}{\text{لا}^{۲}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{لا}^{۲}\,\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \text{ن}\,\text{لا}\,\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}} + \text{ن} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} \cdots \quad (۱)$$

پہلی رقم کو آخری رقم کے ساتھ، دوسری رقم کو آخر کی طرف سے دوسری رقم کے ساتھ، اور علیٰ ہٰذالقیاس . . . . لینے سے

$$(۲\,\text{جم ط})^{\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) + \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}}\right) + \cdots\cdots$$

لیکن دفعہ ماقبل کی رُو سے

لا^ن + ۱ / لا^ن = ۲ جم ن طہ

اور لا^(ن-۲) + ۱ / لا^(ن-۲) = ۲ جم (ن-۲) طہ

وغیرہ .... وغیرہ ....

پس ۲^ن جم^ن طہ = ۲ جم ن طہ + ن × ۲ جم (ن − ۲) طہ

+ ن (ن − ۱) / ۲| × ۲ جم (ن − ۴) طہ + ...

یعنی ۲^(ن-۱) جم^ن طہ = جم ن طہ + ن جم (ن-۲) طہ + ن(ن-۱) / ۲| جم (ن-۴) طہ + ... (۲)

اگر ن طاق ہو تو مساوات (۱) کے بائیں جانب رقوم کی تعداد جفت ہوگی۔ اس لئے دو دو رقموں کے زوج پورے ہوجائیں گے۔ اور کوئی رقم اکیلی نہ بچیگی۔ اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ آخری رقم میں جم طہ شامل ہوگا۔

لیکن اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو مساوات (۱) کی بائیں جانب کے رُکن میں رقوم کی تعداد طاق ہوگی۔ اس لئے جملہ ازواج پورے کرنے کے بعد ایک رقم بچ جائیگی جس میں لا شامل نہیں ہوگا۔ اس کو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم سلسلہ (۲) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم ن| / ((ن-۱)/۲| × (ن+۱)/۲|) جم طہ

ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم $\frac{1}{2}\,\frac{\underline{|\text{ن}}}{\left\{\underline{|\frac{\text{ن}}{2}}\right\}^{2}}$ ہوگی۔

۴۵۔ مشق ۱۔ جم^۸ ط کو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

یہ معلوم ہے کہ $(\text{۲ جم ط})^{8} = \left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{8}$

$= \text{لا}^{8} + ۸\,\text{لا}^{6} + ۲۸\,\text{لا}^{4} + ۵۶\,\text{لا}^{2} + ۷۰ + ۵۶ \times \frac{1}{\text{لا}^{2}} + ۲۸ \times \frac{1}{\text{لا}^{4}} + ۸ \times \frac{1}{\text{لا}^{6}} + \frac{1}{\text{لا}^{8}}$

$= \left(\text{لا}^{8} + \frac{1}{\text{لا}^{8}}\right) + ۸\left(\text{لا}^{6} + \frac{1}{\text{لا}^{6}}\right) + ۲۸\left(\text{لا}^{4} + \frac{1}{\text{لا}^{4}}\right)$

$+ ۵۶\left(\text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}^{2}}\right) + ۷۰$

$= \text{۲ جم ۸ط} + ۸ \times \text{۲ جم ۶ط} + ۲۸ \times \text{۲ جم ۴ط} + ۵۶ \times \text{۲ جم ۲ط} + ۷۰$

$\therefore\ ۲^{7}\,\text{جم}^{8}\,\text{ط} = \text{جم ۸ط} + ۸\,\text{جم ۶ط} + ۲۸\,\text{جم ۴ط} + ۵۶\,\text{جم ۲ط} + ۳۵$

مشق ۲۔ جم^۷ ط کو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

$(\text{۲ جم ط})^{7} = \left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{7}$

$= \text{لا}^{7} + ۷\,\text{لا}^{5} + ۲۱\,\text{لا}^{3} + ۳۵\,\text{لا} + ۳۵\,\frac{1}{\text{لا}} + ۲۱\,\frac{1}{\text{لا}^{3}} + ۷\,\frac{1}{\text{لا}^{5}} + \frac{1}{\text{لا}^{7}}$

$= \left(\text{لا}^{7} + \frac{1}{\text{لا}^{7}}\right) + ۷\left(\text{لا}^{5} + \frac{1}{\text{لا}^{5}}\right) + ۲۱\left(\text{لا}^{3} + \frac{1}{\text{لا}^{3}}\right) + ۳۵\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)$

$= \text{۲ جم ۷ط} + ۷ \times \text{۲ جم ۵ط} + ۲۱ \times \text{۲ جم ۳ط} + ۳۵ \times \text{۲ جم ط}$

$\therefore\ ۲^{6}\,\text{جم}^{7}\,\text{ط} = \text{جم ۷ط} + ۷\,\text{جم ۵ط} + ۲۱\,\text{جم ۳ط} + ۳۵\,\text{جم ط}$

۴۶۔ جب^ن ط کی تفصیل جب ن جفت ہو تو ط کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں اور جب ن طاق ہو تو ط کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو

دفعہ ۴۳ کی رو سے

$$\text{۲ خ جب ط} = \text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}$$

اس لئے $۲^{\text{ن}}\,\text{خ}^{\text{ن}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} = \left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ .... (۱)

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے۔ تب (۱) کی تفصیل

میں آخری رقم $+ \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ ہوگی۔

نیز چونکہ $\text{خ}^{\text{ن}} = (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}$

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$2^{\text{ن}}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} \text{جب}^{\text{ن}} \text{طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\, \text{لا}^{\text{ن}-1} \times \frac{1}{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^{\text{ن}-2} \times \frac{1}{\text{لا}^2} - \dots + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^2 \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-2}}$$

$$- \text{ن}\, \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-1}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) - \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-2} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-2}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\left(\text{لا}^{\text{ن}-4} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-4}}\right) - \dots$$

$$= 2\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} - \text{ن} \times 2\,\text{جم}(\text{ن}-2)\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\, 2\,\text{جم}(\text{ن}-4)\,\text{طہ} - \dots\dots$$

حسب دفعہ ۴۴

$$\therefore 2^{\text{ن}-1}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} \text{جب}^{\text{ن}} \text{طہ} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ} - \text{ن}\,\text{جم}(\text{ن}-2)\,\text{طہ}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,\text{جم}(\text{ن}-4)\,\text{طہ} - \dots\dots\dots \quad (3)$$

چونکہ ن جفت ہے اس لئے مساوات (۲) کے بائیں جانب کی رقموں کی تعداد طاق ہوگی۔ لہذا درمیانی رقم میں لا شامل نہ ہوگا، اسکو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم مساوات (۳) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری رقم

$$\frac{1}{2}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} \frac{\lfloor \text{ن}}{\left\{\lfloor \frac{\text{ن}}{2}\right\}^2}$$ ہوگی۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ن طاق ہے

تب سلسلہ (۱) میں آخری رقم "$-\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}$" ہو گی -

نیز چونکہ $\text{خ}^{\text{ن}} = \text{خ} \times \text{خ}^{\text{ن}-۱} = \text{خ}\,(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}$ اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے -

$$۲^{\text{ن}} \times \text{خ} \times (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\, \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} \times \frac{۱}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} \times \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} \ldots\ldots$$

$$\ldots - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{۲}\,\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \text{ن}\,\text{لا}\,\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right) - \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۴} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}}\right) \ldots\ldots\ (۴)$$

اب بموجب دفعہ (۴۳) $\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ۲\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{طہ}$

$$\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}} = ۲\,\text{خ}\,\text{جب}\,(\text{ن}-۲)\,\text{طہ}$$

لہٰذا مساوات (۴) ہو جاتی ہے:

$$۲^{\text{ن}}\,\text{خ}\,(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ} = ۲\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{طہ}$$

$$-\text{ن}\,۲\,\text{خ}\,\text{جب}(\text{ن}-۲)\text{طہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,۲\,\text{خ}\,\text{جب}(\text{ن}-۴)\text{طہ} - \ldots\ldots$$

یعنی $۲^{\text{ن}-۱}(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ} = \text{جب}\,\text{ن}\,\text{طہ} - \text{ن}\,\text{جب}(\text{ن}-۲)\,\text{طہ}$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{جب}\,(\text{ن}-۴)\,\text{طہ} - \ldots\ldots\ (۵)$$

چونکہ صورت ہذا میں ن طاق ہے اس لئے مساوات (۴) کی بائیں جانب تعدادِ رقوم جفت ہوگی۔ پس کل رقوم دو دو رقموں کے ازدواج میں پوری تقسیم ہو جائینگی اور کوئی رقم اکیلی نہ بچیگی لہذا (۵) کی آخری رقم میں جب طہ شامل ہوگا۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری رقم $(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}} \dfrac{|\text{ن}}{|\frac{\text{ن}-۱}{۲}\;|\frac{\text{ن}+۱}{۲}}$ جب طہ ہوگی۔

۷۴۔ **مشق ۱۔** جب^{۶} طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

یہ معلوم ہے کہ

$$۲^{۶}\,\text{خ}^{۶}\,\text{جب}^{۶}\,\text{طہ} = \left(\text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۶}$$

$$= \text{لا}^{۶} - ۶\,\text{لا}^{۴} + ۱۵\,\text{لا}^{۲} - ۲۰ + ۱۵ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} - ۶ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۴}} + \frac{۱}{\text{لا}^{۶}}$$

$$\text{اسلئے}\; -۲^{۶}\,\text{جب}^{۶}\,\text{طہ} = \left(\text{لا}^{۶} + \frac{۱}{\text{لا}^{۶}}\right) - ۶\left(\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{\text{لا}^{۴}}\right) + ۱۵\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right) - ۲۰$$

$$= ۲\,\text{جم}\,۶\,\text{طہ} - ۶ \times ۲\,\text{جم}\,۴\,\text{طہ} + ۱۵ \times ۲\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} - ۲۰$$

$$\therefore -۲^{۵}\,\text{جب}^{۶}\,\text{طہ} = \text{جم}\,۶\,\text{طہ} - ۶\,\text{جم}\,۴\,\text{طہ} + ۱۵\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} - ۱۰$$

مشق ۲ — جب^{۷} طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو۔

ظاہر ہے کہ $۲^{۷}\,\text{خ}^{۷}\,\text{جب}^{۷}\,\text{طہ} = \left(\text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۷}$

$$= \text{لا}^{۷} - ۷\,\text{لا}^{۵} + ۲۱\,\text{لا}^{۳} - ۳۵\,\text{لا} + ۳۵ \times \frac{۱}{\text{لا}} - ۲۱ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۳}} + ۷ \times \frac{۱}{\text{لا}^{۵}} - \frac{۱}{\text{لا}^{۷}}$$

$$= \left(\text{لا}^{۷} - \frac{۱}{\text{لا}^{۷}}\right) - ۷\left(\text{لا}^{۵} - \frac{۱}{\text{لا}^{۵}}\right) + ۲۱\left(\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{\text{لا}^{۳}}\right) - ۳۵\left(\text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right)$$

۲^{۶} خ جب^{۷} طہ = ۲ خ جب ۷ طہ − ۷ × ۲ خ جب ۵ طہ

+ ۲۱ × ۲ خ جب ۳ طہ − ۳۵ × ۲ خ جب طہ

∴ − ۲^{۶} جب^{۷} طہ = جب ۷ طہ − ۷ جب ۵ طہ + ۲۱ جب ۳ طہ − ۳۵ جب طہ

مشق ۳ — جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ۲^{۵} جم^{۵} طہ = (لا + ۱/لا)^{۵} اور ۲^{۷} خ^{۷} جب^{۷} طہ = (لا − ۱/لا)^{۷}

اسلئے ۲^{۱۲} خ^{۷} جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ = (لا^{۲} − ۱/لا^{۲})^{۵} (لا − ۱/لا)^{۲}

= [لا^{۱۰} − ۵ لا^{۶} + ۱۰ لا^{۲} − ۱۰/لا^{۲} + ۵/لا^{۶} − ۱/لا^{۱۰}] [لا^{۲} − ۲ + ۱/لا^{۲}]

= (لا^{۱۲} − ۱/لا^{۱۲}) − ۲ (لا^{۱۰} − ۱/لا^{۱۰}) − ۴ (لا^{۸} − ۱/لا^{۸}) + ۱۰ (لا^{۶} − ۱/لا^{۶})

+ ۵ (لا^{۴} − ۱/لا^{۴}) − ۲۰ (لا^{۲} − ۱/لا^{۲})

لہٰذا حسب سابق

− ۲^{۱۱} جم^{۵} طہ جب^{۷} طہ = جب ۱۲ طہ − ۲ جب ۱۰ طہ − ۴ جب ۸ طہ

+ ۱۰ جب ۶ طہ + ۵ جب ۴ طہ − ۲۰ جب ۲ طہ

امثلہ ۷

ثابت کرو کہ

۱ — جب^{۵} طہ = ۱/۱۶ [جب ۵ طہ − ۵ جب ۳ طہ + ۱۰ جب طہ]

۲ — جم^{۹} طہ = ۱/۲۵۶ [جم ۹ طہ + ۹ جم ۷ طہ + ۳۶ جم ۵ طہ + ۸۴ جم ۳ طہ + ۱۲۶ جم طہ]

۳ — جم^{۱۰} طہ = ۱/۵۱۲ [جم ۱۰ طہ + ۱۰ جم ۸ طہ + ۴۵ جم ۶ طہ + ۱۲۰ جم ۴ طہ + ۲۱۰ جم ۲ طہ + ۱۲۶]

۴ـ جب^{۸} طہ = $\frac{۱}{۱۲۸}$ [جم ۸ طہ − ۸ جم ۶ طہ + ۲۸ جم ۴ طہ − ۵۶ جم ۲ طہ + ۳۵]

۵ـ جب^{۹} طہ = $\frac{۱}{۲۵۶}$ [جب ۹ طہ − ۹ جب ۷ طہ + ۳۶ جب ۵ طہ
− ۸۴ جب ۳ طہ + ۱۲۶ جب طہ]

۶ـ ۲^{۵} جب^{۴} طہ جم^{۲} طہ = جم ۶ طہ − ۲ جم ۴ طہ − جم ۲ طہ + ۲

۷ـ ۲^{۶} جب^{۵} طہ جم^{۲} طہ = جب ۷ طہ − ۳ جب ۵ طہ + جب ۳ طہ + ۵ جب طہ

۸ـ ۲^{۱۰} جب^{۷} طہ جم^{۴} طہ = جب ۱۱ طہ + ۵ جب ۹ طہ + ۷ جب ۷ طہ − ۵ جب ۵ طہ
− ۲۲ جب ۳ طہ − ۱۴ جب طہ

۴۸ـ $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

اگر لا < ۱ تو

$\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ − ۲ لا جم طہ + لا}^{۲}}$ = جب طہ + لا جب ۲ طہ + لا^{۲} جب ۳ طہ
+ ...... + لا$^{ن-۱}$ جب ن طہ + ... تا لاتناہی ....(۱)

اس کو ثابت کرنے کے لئے دونوں جانب ۱ − ۲ لا جم طہ + لا^{۲} سے ضرب دو تو دائیں طرف کا رکن جب طہ کے مساوی ہوگا۔

اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا$^{ن-۱}$ کے سروں کو برابر کرنے سے

$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ = لا$^{ن-۱}$ کا سر [۱ − ۲ لا جم طہ + لا^{۲}]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا$^{ن-۱}$ کا سر [۱ − لا (۲ جم طہ − لا)]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا$^{\text{ن}-1}$ کا سر ۱ + لا (۲ جم طہ - لا) + لا^{2} (۲ جم طہ - لا)^{2} + ...

+ لا$^{\text{ن}-3}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-3}$ + لا$^{\text{ن}-2}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-2}$ + لا$^{\text{ن}-1}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-1}$

+ لا$^{\text{ن}}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}}$ + ... میں ...... (۲)

اب لا$^{\text{ن}-1}$ کا سر لا$^{\text{ن}-1}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-1}$ کی تفصیل میں

= (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-1}$

لا$^{\text{ن}-1}$ کا سر لا$^{\text{ن}-2}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-2}$ کی تفصیل میں

= لا کا سر (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-2}$ کی تفصیل میں

= - (ن - ۲) (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-3}$

اسی طرح سے لا$^{\text{ن}-1}$ کا سر، لا$^{\text{ن}-3}$ (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-3}$ میں

= لا^{2} کا سر (۲ جم طہ - لا)$^{\text{ن}-3}$ میں

= $\frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)}{\lfloor 2}$ (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-5}$

علیٰ ہذا القیاس

اس لئے مندرجہ بالا طریقہ کے بموجب مساوات (۲) کی تمام رقوم میں سے لا$^{\text{ن}-1}$ کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ = (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-1}$ - (ن - ۲) (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-3}$

+ $\frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)}{\lfloor 2}$ (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-5}$

- $\frac{(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)(\text{ن}-6)}{\lfloor 3}$ (۲ جم طہ)$^{\text{ن}-7}$ + ...

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو سلسلہ بالا کی آخری رقم

(-۱)$^{\frac{ن-۱}{۲}}$ ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم (-۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ (ن جم طہ) ہوگی

۴۹ — جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

اگر لا < ۱ تو

$$\frac{۱ - \text{لا}^{۲}}{۱ - ۲\ \text{لا جم طہ} + \text{لا}^{۲}} = ۱ + ۲\ \text{لا جم طہ} + ۲\ \text{لا}^{۲}\ \text{جم ۲ طہ}$$

+ ۲ لا^{۳} جم ۳ طہ + ... + ۲ لا^{ن} جم ن طہ + ... تا لاتناہی ....(۱)

اس کو ثابت کرنے کے لئے مساوات کے دونوں جانب ۱ - ۲ لا جم طہ + لا^{۲} سے ضرب دو تب بائیں جانب کا رکن ۱ - لا^{۲} کے مساوی ہو جائے گا۔ اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا^{ن} کے سرون کو باہم مساوی کرنے سے

۲ جم ن طہ = لا^{ن} کا سر (۱ - لا^{۲}) [۱ - ۲ لا جم طہ + لا^{۲}]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا^{ن} کا سر - لا$^{ن-۲}$ کا سر [۱ - لا (۲ جم طہ - لا)]$^{-۱}$ کی تفصیل میں

= لا^{ن} کا سر - لا$^{ن-۲}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں [۱ + لا (۲ جم طہ - لا) + لا^{۲} (۲ جم طہ - لا)^{۲}

+ ..... + لا$^{ن-۲}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن-۲}$ + لا$^{ن-۱}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن-۱}$

+ لا^{ن} (۲ جم طہ - لا)^{ن} + لا$^{ن+۱}$ (۲ جم طہ - لا)$^{ن+۱}$ + ...]

دفعہ گذشتہ کی طرح رقم لا^{ن} (۲ جم طہ - لا)^{ن} سے شروع ہوکر لا^{ن} کے سرون کو اکٹھا کرنے سے

۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ)^{ن} - (ن - ۱) (۲ جم طہ)$^{ن-۲}$

$$+\frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۲}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۳}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots$$

$$-\Big[(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۲}-(\text{ن}-۳)(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۴}+\frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۲}\times(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۶}-\cdots\cdots\Big]$$

$$=(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}}-\text{ن}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۲}+\Big[\frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۲}+(\text{ن}-۳)\Big](\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\Big[\frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۳}+\frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۲}\Big](\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots$$

یعنی بالآخر $\text{۲ جم ن طہ}=(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}}-\text{ن}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۲}$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۲}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۴}$$

$$-\frac{\text{ن}(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۳}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}-۶}+\cdots\cdots\quad(۲)$$

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم $(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{ن}(\text{۲ جم طہ})$ ہو گی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم $(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\times ۲$ ہو گی۔

۵۰ — $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

حسب دفعہ ۴۸

$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}=\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا سر $[۱-\text{۲ لا جم طہ}+\text{لا}^۲]^{-۱}$ کی تفصیل میں

$= \text{لا}^{\text{ن}-1}$ کا سر $\left[1+\text{لا}\,(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})\right]^{-1}$ کی تفصیل میں

$= \text{لا}^{\text{ن}-1}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں $\left[1-\text{لا}\,(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})+\text{لا}^{2}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{2}-\cdots\cdots+(-1)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{\text{ر}}+\cdots\cdots\right]$ (۱)

صورت اول ۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن-۱ جفت ہے تب ظاہر ہے کہ سلسلہ بالا کی صرف انہی رقوم سے $\text{لا}^{\text{ن}-1}$ کا کوئی سر حاصل ہو سکتا ہے جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}-1}{2}$ یا اس سے زیادہ ہے لہذا صورت موجودہ میں

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا}^{\text{ن}-1}\ \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$1-\text{لا}\,(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})+\cdots\cdots+(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}-1}{2}}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}-1}{2}}$$

$$+(-1)^{\frac{\text{ن}+1}{2}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+1}{2}}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+1}{2}}+(-1)^{\frac{\text{ن}+3}{2}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+3}{2}}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{\frac{\text{ن}+3}{2}}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}(\text{لا}-2\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-1}+\cdots\cdots$$

دفعہ ۸۴ کی طرح مذکورہ بالا سلسلہ میں سے $\text{لا}^{\text{ن}-1}$ کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = (-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}+(-1)^{\frac{\text{ن}+1}{2}}\left[\frac{\frac{\text{ن}-1}{2}\times\frac{\text{ن}+1}{2}}{\underline{|2}}\right](-2\,\text{جم طہ})^{2}$$

$$+(-1)^{\frac{\text{ن}+3}{2}}\,\frac{\frac{\text{ن}-3}{2}\times\frac{\text{ن}-1}{2}\times\frac{\text{ن}+1}{2}\times\frac{\text{ن}+3}{2}}{\underline{|4}}(-2\,\text{جم طہ})^{4}+\cdots\cdots+(-2\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-1}$$

پس جب ن طاق ہو تو بالاخر

$$(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = 1-\frac{\text{ن}^{2}-1^{2}}{\underline{|2}}\,\text{جم}^{2}\text{طہ}+\frac{(\text{ن}^{2}-1^{2})(\text{ن}^{2}-3^{2})}{\underline{|4}}\,\text{جم}^{4}\text{طہ}$$

$$-\frac{(ن^{۲}-۱)(ن^{۲}-۳^{۲})(ن^{۲}-۵^{۲})}{\lfloor ۶}\,\text{جم}^{۶}\,ط-\cdots+(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}(۲\,\text{جم}\,ط)^{ن-۱}\cdots(۲)$$

صورت دوم فرض کرو کہ ن جفت ہے یعنی ن-۱ طاق ہے۔ سلسلہ (۱) میں صرف انہی رقوم سے $لا^{ن-۱}$ کا کوئی سر حاصل ہو سکتا ہے جن میں ر کی قیمت $\frac{ن}{۲}$ یا اس سے زیادہ ہو۔

لہذا صورت ہذا میں

$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}$ = $لا^{ن-۱}$ کا سر ذیل کے سلسلہ میں

$$۱-لا(لا-۲\,\text{جم}\,ط)+\cdots+(-۱)^{\frac{ن}{۲}}لا^{\frac{ن}{۲}}(لا-۲\,\text{جم}\,ط)^{\frac{ن}{۲}}$$

$$+(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۱}لا^{\frac{ن}{۲}+۱}(لا-۲\,\text{جم}\,ط)^{\frac{ن}{۲}+۱}+(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۲}لا^{\frac{ن}{۲}+۲}(لا-۲\,\text{جم}\,ط)^{\frac{ن}{۲}+۲}+\cdots$$

$$+(-۱)^{ن-۱}لا^{ن-۱}(لا-۲\,\text{جم}\,ط)^{ن-۱}+\cdots\cdots$$

مطلوبہ سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}=(-۱)^{\frac{ن}{۲}}\times\frac{ن}{۲}(-۲\,\text{جم}\,ط)+(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۱}\frac{(\frac{ن}{۲}+۱)(\frac{ن}{۲})(\frac{ن}{۲}-۱)}{\lfloor ۳}(-۲\,\text{جم}\,ط)^{۳}$$

$$+(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۲}\frac{(\frac{ن}{۲}+۲)(\frac{ن}{۲}+۱)(\frac{ن}{۲})(\frac{ن}{۲}-۱)(\frac{ن}{۲}-۲)}{\lfloor ۵}(-۲\,\text{جم}\,ط)^{۵}\times\cdots+(۲\,\text{جم}\,ط)^{ن-۱}$$

پس جب ن جفت ہو تو بالآخر

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۱}\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}=ن\,\text{جم}\,ط-\frac{ن(ن^{۲}-۲^{۲})}{\lfloor ۳}\,\text{جم}^{۳}\,ط$$

$$+\frac{ن(ن^{۲}-۲^{۲})(ن^{۲}-۴^{۲})}{\lfloor ۵}\,\text{جم}^{۵}\,ط-\cdots+(-۱)^{\frac{ن}{۲}+۱}(۲\,\text{جم}\,ط)^{ن-۱}\cdots\cdots(۳)$$

معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ہذا کے ہر دو سلسلے
۔ ۴۸ ہی کا سلسلہ ہیں جبکہ موخرالذکر کو الٹا لکھا جائے۔ یہ امر طریقہ
بخوبی واضح ہے اور نیز اس کا بلا واسطہ ثبوت الگ دیا جا سکتا ہے
ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ
رو۔

فعہ ۴۹

= لاⁿ کا سر۔ لا^(ن-۲) کا سر (۱ - ۲ لا جم طہ + لا^۲)^(-۱) میں

سر۔ لا^(ن-۲) کا سر ذیل کے سلسلہ ذیل میں

۲ جم طہ) + لا^۲ (لا - ۲ جم طہ)^۲ - ۔۔۔ + (-۱)^ر لا^ر (لا - ۲ جم طہ)^ر

+ ۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱)

ہ ۴۹ ۔

اول ۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن - ۱ جفت ہے
کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف انہی رقوم سے حاصل
جن میں ر کی قیمت $\frac{ن-۱}{۲}$ یا اس سے زیادہ ہو۔
ن طہ = لاⁿ کا سر۔ لا^(ن-۲) کا سر ذیل کے سلسلہ میں

$$۔ ۲ جم طہ) + ۔۔ + (-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} لا^{\frac{ن-۱}{۲}} (لا - ۲ جم طہ)^{\frac{ن-۱}{۲}}$$

$$لا^{\frac{ن+۱}{۲}} (لا - ۲ جم طہ)^{\frac{ن+۱}{۲}} + (-۱)^{\frac{ن+۳}{۲}} لا^{\frac{ن+۳}{۲}} (لا - ۲ جم طہ)^{\frac{ن+۳}{۲}}$$

$$۔۔۔ + (-۱)^{ن} لا^{ن} (لا - ۲ جم طہ)^{ن} + ۔۔۔۔$$

$$(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} \left[(-۲ جم طہ) + (-۱)^{\frac{ن+۱}{۲}} \left[\frac{ن+۱}{۲} (-۲ جم طہ) - \frac{\frac{ن+۳}{۲} \times \frac{ن+۱}{۲} \times \frac{ن-۱}{۲}}{\lfloor ۳} (-۲ جم طہ)^۳ \right] \right]$$

$$+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}+\text{۳}}{\text{۲}}}\left[\frac{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}+\text{۳}}{\text{۲}}}{\lfloor\text{۳}}(-\text{۲ جم طہ})^{\text{۳}}-\frac{\frac{\text{ن}+\text{۳}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}-\text{۳}}{\text{۲}}\times\frac{\text{ن}-\text{۵}}{\text{۲}}}{\lfloor\text{۵}}(-\text{۲ جم طہ})^{\text{۵}}\right]$$

$$+\cdots\cdots+(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}}$$

$$\therefore\quad(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۲ جم ن طہ})$$

$$=\text{جم طہ}\left[(\text{ن}-\text{۱})+(\text{ن}+\text{۱})\right]-\frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}-\text{۱})}{\lfloor\text{۳}}\text{جم}^{\text{۳}}\text{طہ}\left[(\text{ن}-\text{۳})+(\text{ن}+\text{۳})\right]$$

$$+\frac{(\text{ن}+\text{۳})(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۳})}{\lfloor\text{۵}}\text{جم}^{\text{۵}}\text{طہ}\left[(\text{ن}-\text{۵})+(\text{ن}+\text{۵})\right]+\cdots$$

$$+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}}$$

پس جب ن طاق ہو تو بالآخر

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\text{جم ن طہ}$$

$$=\text{ن جم طہ}-\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۳}}\text{جم}^{\text{۳}}\text{طہ}+\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۵}}\text{جم}^{\text{۵}}\text{طہ}$$

$$-\cdots\cdots(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\cdots\cdots(\text{۲})$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن **جفت** ہے۔

جن سروں کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف انہی رقوم سے حاصل ہو سکتے ہیں جن میں ر کی قیمت $\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲}}$ یا اس سے زیادہ ہو اس لئے

$$\text{۲ جم ن طہ}=\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{کا سر}-\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}}\ \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$\text{۱}-\text{لا}(\text{لا}-\text{۲ جم طہ})+\cdots\cdots+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲}}}\text{لا}^{\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲}}}(\text{لا}-\text{۲ جم طہ})^{\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲}}}$$

$$(\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{\frac{ن+۲}{۲}}\ \text{لا}^{\frac{ن+۲}{۲}}\ (-۱)^{\frac{ن+۲}{۲}} + (\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{\frac{ن}{۲}}\ \text{لا}^{\frac{ن}{۲}}\ (-۱)^{\frac{ن}{۲}} +$$

$$+ \cdots\cdots + (-۱)^{ن}\ \text{لا}^{ن}\ (\text{لا}-۲\,\text{جم طہ})^{ن} + \cdots$$

$$= (-۱)^{\frac{ن-۲}{۲}}\left[-۱\right] + (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\left[۱ - \frac{\frac{ن}{۲}\left(\frac{ن-۲}{۲}\right)}{\lfloor ۲}(-۲\,\text{جم طہ})^{۲}\right]$$

$$+ (-۱)^{\frac{ن+۲}{۲}}\left[\frac{\frac{ن}{۲}\times\frac{ن+۲}{۲}}{\lfloor ۲}(-۲\,\text{جم طہ})^{۲} - \frac{\frac{ن-۴}{۲}\times\frac{ن-۲}{۲}\times\frac{ن}{۲}\times\frac{ن+۲}{۲}}{\lfloor ۴}(-۲\,\text{جم طہ})^{۴}\right]$$

$$+ (-۱)^{\frac{ن+۴}{۲}}\left[\frac{\frac{ن-۲}{۲}\times\frac{ن}{۲}\times\frac{ن+۲}{۲}\times\frac{ن+۴}{۲}}{\lfloor ۴}(-۲\,\text{جم طہ})^{۴}\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{ن-۶}{۲}\times\frac{ن-۴}{۲}\times\frac{ن-۲}{۲}\times\frac{ن}{۲}\times\frac{ن+۲}{۲}\times\frac{ن+۴}{۲}}{\lfloor ۶}(-۲\,\text{جم طہ})^{۶}\right]$$

$$+ \cdots\cdots\cdots + (۲\,\text{جم طہ})^{ن}$$

$$\therefore (-۱)^{\frac{ن}{۲}}(۲\,\text{جم ن طہ}) = [۱+۱] - \frac{\text{جم}^{۲}\text{طہ}}{\lfloor ۲}\left[ن(ن-۲) + (ن+۲)\,ن\right]$$

$$+ \frac{\text{جم}^{۴}\text{طہ}}{\lfloor ۴}\left[(ن+۲)\,ن\,(ن-۲)(ن-۴) + (ن+۴)(ن+۲)\,ن\,(ن-۲)\right]$$

$$+ \cdots\cdots + (-۱)^{\frac{ن}{۲}}(۲\,\text{جم طہ})^{ن}$$

پس جب ن جفت ہو تو بالآخر

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}}\,\text{جم ن طہ} = ۱ - \frac{ن^{۲}\,\text{جم}^{۲}\text{طہ}}{\lfloor ۲} + \frac{ن^{۲}(ن^{۲}-۲^{۲})}{\lfloor ۴}\,\text{جم}^{۴}\text{طہ}$$

$$- \frac{ن^{۲}(ن^{۲}-۲^{۲})(ن^{۲}-۴^{۲})}{\lfloor ۶}\,\text{جم}^{۶}\text{طہ} + \cdots\cdots + (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\,۲^{ن-۱}\,\text{جم}^{ن}\text{طہ}$$

نوٹ۔ حسب سابق دفعہ ہذا کے ہردو سلسلے (۲)، (۳) درحقیقت دفعہ ۴۹ (۳)

ہی کا سلسلہ (۲) ہیں جبکہ موخرالذکر کو الٹ لکھا جائے۔

۵۲۔ اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۲) سے اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}=\text{۱}-\frac{\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}}\text{جم}^{\text{۲}}\text{طہ}+\frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۴}}}\text{جم}^{\text{۴}}\text{طہ}$$

$$-\frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۵}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۶}}}\text{جم}^{\text{۶}}\text{طہ}+\cdots\cdots$$

$$+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۲جم طہ})^{\text{ن}-\text{۱}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{۱})$$

$$\text{اور}\ (-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\text{جم ن طہ}=\text{ن جم طہ}-\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۳}}}\text{جم}^{\text{۳}}\text{طہ}+\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۵}}}\text{جم}^{\text{۵}}\text{طہ}$$

$$+\cdots\cdots+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\cdots\cdots(\text{۲})$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو $\frac{\pi}{\text{۲}}$ ـ طہ میں اور بنا بریں جم طہ کو جب طہ میں تبدیل کردیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب $(\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲}}-\text{ن طہ})$ یعنی $(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}$ جم ن طہ اور جم ن طہ بدل کر جم $(\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲}}-\text{ن طہ})$ یعنی $(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}$ جب ن طہ ہو جائیگا۔

دفعہ ہذا کی مساوات (۱) اور (۲) میں حسبہٖ تغیر کرنے سے اگر ن طاق ہو تو

$$\text{جم ن طہ}=\text{جم طہ}\Big\{\text{۱}-\frac{\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}}}{|\underline{\text{۲}}}\text{جب}^{\text{۲}}\text{طہ}+\frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۴}}}\text{جب}^{\text{۴}}\text{طہ}$$

$$-\cdots\cdots+(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{جب}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{طہ}\Big\}\cdots\cdots(\text{۳})$$

اور

$$\text{جب ن طہ}=\text{ن جب طہ}-\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۳}}}\text{جب}^{\text{۳}}\text{طہ}+\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۵}}}\text{جب}^{\text{۵}}\text{طہ}$$

$$+\dots\dots+(-1)^{\frac{ن-1}{2}}\times 2^{ن-1}\,\text{جب}^{ن}\,\text{ط}\dots\dots\dots(4)$$

۵۳ - نیز اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۳) اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ

$$(-1)^{\frac{ن}{2}+1}\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ن\,\text{جم ط}\;\frac{ن(ن^2-2^2)}{\underline{3|}}\,\text{جم}^3\text{ط}$$

$$+\frac{ن(ن^2-2^2)(ن^2-4^2)}{\underline{5|}}\,\text{جم}^5\text{ط}+\dots+(-1)^{\frac{ن}{2}+1}(2\,\text{جم ط})^{ن-1}\quad(1)$$

$$\text{اور}\quad(-1)^{\frac{ن}{2}}\,\text{جم ن ط} = 1-\frac{ن^2}{\underline{2|}}\,\text{جم}^2\text{ط}+\frac{ن^2(ن^2-2^2)}{\underline{4|}}\,\text{جم}^4\text{ط}-\dots\dots$$

$$+(-1)^{\frac{ن}{2}}\,2^{ن-1}(\text{جم}^{ن}\,\text{ط})\dots\dots\dots(2)$$

ان مساواتوں میں اگر ط کو $(\frac{\pi}{2}-\text{ط})$ میں اور بنابریں جم ط کو جب ط میں تبدیل کردیا جائے تو جب ن ط بدل کر جب $(\frac{ن\pi}{2}-\text{ن ط})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}+1}$ جب ن ط اور جم ن ط بدل کر جم $(\frac{ن\pi}{2}-\text{ن ط})$ یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}}$ جم ن ط ہو جائے گا۔

پس حسبہ تغیر کرنے سے اگر ن جفت ہو تو

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ط}} = ن\,\text{جب ط}-\frac{ن(ن^2-2^2)}{\underline{3|}}\,\text{جب}^3\text{ط}+\frac{ن(ن^2-2^2)(ن^2-4^2)}{\underline{5|}}\,\text{جب}^5\text{ط}$$

$$\dots+(-1)^{\frac{ن}{2}+1}(2\,\text{جب ط})^{ن-1}\dots\dots\dots(3)$$

$$\text{اور}\quad\text{جم ن ط} = 1-\frac{ن^2}{\underline{2|}}\,\text{جب}^2\text{ط}+\frac{ن^2(ن^2-2^2)}{\underline{4|}}\,\text{جب}^4\text{ط}$$

$$+\dots\dots(-1)^{\frac{ن}{2}}\,2^{ن-1}\,\text{جب}^{ن}\,\text{ط}\dots\dots(4)$$

۵۴ - اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۲ کے سلسلے (۱)، (۲) اور اگر ن

جفت ہو تو دفعہ ۵۳ کے سلسلے (۱)، (۲) بالترتیب جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلوں کو جم طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں ظاہر کرتے ہیں۔ نیز ن کی طاق یا جفت قیمتوں کے واسطے دفعات بالا کے سلسلے (۳)، (۴) ہر دو مقادیر مذکورہ یعنی جب ن طہ کی اور جم ن طہ کی تفصیلوں کو جب طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں ظاہر کرتے ہیں۔

امثلہ ۸

ثابت کرو کہ

۱۔ جب ۷ طہ = ۷ جب طہ − ۵۶ جب^{3} طہ + ۱۱۲ جب^{5} طہ − ۶۴ جب^{7} طہ

۲۔ جم ۷ طہ = ۶۴ جم^{7} طہ − ۱۱۲ جم^{5} طہ + ۵۶ جم^{3} طہ − ۷ جم طہ

۳۔ جب ۸ طہ = جب طہ [۱۲۸ جم^{7} طہ − ۱۹۲ جم^{5} طہ + ۸۰ جم^{3} طہ − ۸ جم طہ]

۴۔ جم ۸ طہ = ۱ − ۳۲ جب^{2} طہ + ۱۶۰ جب^{4} طہ − ۲۵۶ جب^{6} طہ + ۱۲۸ جب^{8} طہ

۵۔ جب ۹ طہ = جب طہ {۲۵۶ جم^{8} طہ − ۴۴۸ جم^{6} طہ + ۲۴۰ جم^{4} طہ − ۴۰ جم^{2} طہ + ۱}

۶۔ جم ۶ طہ کو صرف جم طہ کی رقوم میں بیان کرو اور نتیجہ کی تصدیق کرو جبکہ طہ = $\frac{\pi}{3}$ اور طہ = $\frac{\pi}{2}$

۷۔ ذیل کی جبریہ مساوات متماثلہ کو ثابت کرو

$$\text{ف}^{\text{ن}} + \text{ق}^{\text{ن}} = (\text{ف} + \text{ق})^{\text{ن}} - \text{ن}(\text{ف} + \text{ق})^{\text{ن}-2}\,\text{ف ق} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}(\text{ف} + \text{ق})^{\text{ن}-4}\,\text{ف}^{2}\text{ق}^{2} + \cdots$$

اور اس سے حاصل کرو

$$2\,\text{جم ن طہ} = (2\,\text{جم طہ})^{\text{ن}} - \text{ن}(2\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}(2\,\text{جم طہ})^{\text{ن}-4} - \cdots$$

۵۵- مشق- ذیل کے سلسلوں کی قیمتیں معلوم کرو

$\text{قط ط} + \text{قط}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{قط}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

$\text{قط ط} + \text{قط}^۲\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{قط}^۲\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

دفعہ ۵۱ کی مساواتوں (۲) اور (۳) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر ن **طاق** ہو اور جم ط کو م سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ن م} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۱^۲)}{\lfloor ۳}\text{م}^۳ + \frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۱^۲)(\text{ن}^۲-۳^۲)}{\lfloor ۵}\text{م}^۵ + \ldots\ldots + (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\, ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{م}^{\text{ن}}$$

$$= (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\ \text{جم ن ط} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور اگر ن **جفت** ہو تو

$$۱ - \frac{\text{ن}^۲}{\lfloor ۲}\text{م}^۲ + \frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)}{\lfloor ۴}\text{م}^۴ + \ldots\ldots + (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\, ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{م}^{\text{ن}}$$

$$= (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\ \text{جم ن ط} \ \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب اگر جم ن ط کی قیمت معلوم ہو تو مساواتوں (۱)، (۲) سے جم ط کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

لیکن چونکہ $\text{جم ن ط} = \text{جم}(\text{ن ط} + ۲\pi) = \text{جم}(\text{ن ط} + ۴\pi) = \ldots\ldots$

اسلئے ان مساواتوں سے

$$\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۶\pi}{\text{ن}}\right)،$$

وغیرہ کی قیمتیں بھی حاصل ہونگی۔

اسلئے ہر حالت میں قیمتیں حسب ذیل ہونگی:-

$\text{جم ط}،\ \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)، \ldots\ldots$ ن رقموں تک

مساواتوں (۱)، (۲) میں م کو $\frac{۱}{\text{ہ}}$ کے برابر لکھو اور $\text{ہ}^{\text{ن}}$ سے ضرب دو تب ذیل کی مساواتیں حاصل ہونگی:-

جب ن طاق ہو تو

$$(-1)^{\frac{ن-1}{2}}\,\text{جم}\,ن\,ط \times ما^{ن} - ن\,ما^{ن-1} + \frac{ن(ن^2-1^2)}{\lfloor 2}\,ما^{ن-3} - \cdots\cdots = 0 \qquad (3)$$

اور جب ن جفت ہو تو

$$\left\{(-1)^{\frac{ن}{2}}\,\text{جم}\,ن\,ط - 1\right\} ما^{ن} + \frac{ن^2}{\lfloor 2}\,ما^{ن-2} - \cdots\cdots \qquad (4)$$

ان مساواتوں کی اصلیں

$$\text{قط}\,ط،\ \text{قط}\left(ط + \frac{2\pi}{ن}\right)،\ \text{قط}\left(ط + \frac{4\pi}{ن}\right)، \cdots\cdots$$

ہونگی۔

ان کو $ما_1$، $ما_2$، $ما_3$ .... $ما_ن$ سے تعبیر کرو

تب $ما_1 + ما_2 + ما_3 + \cdots + ما_ن =$ قیمتوں کا مجموعہ

$$= \frac{ن}{(-1)^{\frac{ن-1}{2}}\,\text{جم}\,ن\,ط} = (-1)^{\frac{ن-1}{2}}\,ن\,\text{قط}\,ن\,ط \quad (\text{اگر ن طاق ہو})$$

$$\text{اور} = 0 \qquad (\text{اگر ن جفت ہو})$$

نیز $ما_1^2 + ما_2^2 + \cdots\cdots + ما_ن^2 = (ما_1 + ما_2 + \cdots + ما_ن)^2 - 2(ما_1 ما_2 + ما_2 ما_3 + \cdots\cdots)$

$$= \frac{ن^2}{\text{جم}^2\,ن\,ط} = ن^2\,\text{قط}^2\,ن\,ط \quad (\text{اگر ن طاق ہو})$$

$$\text{اور} = -2\,\frac{\frac{ن^2}{\lfloor 2}}{(-1)^{\frac{ن}{2}}\,\text{جم}\,ن\,ط - 1} = \frac{ن^2}{1-(-1)^{\frac{ن}{2}}\,\text{جم}\,ن\,ط} \quad (\text{اگر ن جفت ہو})$$

امثلہ ۹

ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو

۱۔ $\text{جم}\,ط\ \text{جم}\left(ط + \frac{2\pi}{ن}\right)\text{جم}\left(ط + \frac{4\pi}{ن}\right) \cdots\cdots \text{جم}\left\{ط + (ن-1)\frac{2\pi}{ن}\right\}$

۲- جب ط جب (ط + ۲π/ن) جب (ط + ۴π/ن) .... جب [ط + (ن − ۱) ۲π/ن]

۳- قم۲ ط + قم۲ (ط + ۲π/ن) + قم۲ (ط + ۴π/ن) .... ن رقموں تک

۴- مس۲ ط + مس۲ (ط + ۲π/ن) + مس۲ (ط + ۴π/ن) ...... ن رقموں تک

[ذیل کے پانچ سوالوں میں دفعہ ۱۰۳ کی مساوات (۵) سے شروع کرو]

۵- مس ط + مس (ط + π/ن) + مس (ط + ۲π/ن) ...... ن رقموں تک

۶- ہم ط + ہم (ط + π/ن) + ہم (ط + ۲π/ن) .... ،،

۷- مس ط مس (ط + π/ن) مس (ط + ۲π/ن) ..... ن اجزائے ضربی تک

۸- مس۲ ط + مس۲ (ط + π/ن) + مس۲ (ط + ۲π/ن) + ... ن رقموں تک

۹- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ق = ۳ م = ن۲ − ۱
جہاں ق = قط۲ π/ن + قط۲ ۲π/ن + قط۲ ۳π/ن + ... (ن − ۱) رقموں تک
اور م = قم۲ π/ن + قم۲ ۲π/ن + قم۲ ۳π/ن + ... (ن − ۱) رقموں تک

۱۰- اگر قط (ط + ۲رπ/ن) میں ر کو صفر سے لیکر ن − ۱ تک تمام قیمتیں دی جائیں تو جو رقوم اس طرح سے حاصل ہوں گی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

نوٹ۔ ابواب مابعد کی خواندگی سے طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ مثالات ۱۴ اور ۱۵ کے نتائج دفعہ ۱۱۰ کی مدد سے بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔
یعنی ۲ جم ن ط = لا^ن کا سر۔ لوک [۱ − لا (۲ جم ط − لا)] کی تفصیل میں۔

باب پنجم

سلسلۂ قوت نما ملتف مقداروں کیلئے،

تفاعیلِ مستدیرہ ملتف زاویوں کیلئے اور زائدی تفاعیل

۵۶ - اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو ہم دفعہ ۵ میں ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{و}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \qquad (۱)$$

اگر لا حقیقی نہ ہو بلکہ ملتف ہو یعنی اگر لا، ا + خ ب کی شکل کا ہو تو اس صورت میں فی الحال ہم $\text{و}^{\text{لا}}$ کو کوئی معنی نہیں پہنا سکتے۔

فرض کرو کہ ہم اس رقم (یعنی $\text{و}^{\text{لا}}$) کی تعریف یوں کرتے ہیں کہ لا کی تمام قیمتوں کے واسطے (خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملتف) $\text{و}^{\text{لا}}$ سے مراد ذیل کا سلسلہ ہے۔

$$۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \ldots (۲)$$

۵۷ - ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا ملتف ہو تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لا = ر (جم طہ + $\sqrt{-1}$ جب طہ)

تب $\text{و}^{\text{لا}}$ = ۱ + لا + $\frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳}$ + ... تالاتناہی

= ۱ + ر (جم طہ + $\sqrt{-1}$ جب طہ) + $\frac{\text{ر}^{۲}(\text{جم ۲ طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ۲ طہ})}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}(\text{جم ۳ طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ۳ طہ})}{\lfloor ۳}$

+ ..... تالاتناہی

= ۱ + ر جم طہ + $\frac{\text{ر}^{۲}\ \text{جم ۲ طہ}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}\ \text{جم ۳ طہ}}{\lfloor ۳}$ + ...

+ $\sqrt{-1}$ [ر جب طہ + $\frac{\text{ر}^{۲}\ \text{جب ۲ طہ}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}\ \text{جب ۳ طہ}}{\lfloor ۳}$ + ...]

مقدار ۱ + ر جم طہ + $\frac{\text{ر}^{۲}\ \text{جم ۲ طہ}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}\ \text{جم ۳ طہ}}{\lfloor ۳}$ + ... تالاتناہی

< ۱ + ر + $\frac{\text{ر}^{۲}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}}{\lfloor ۳}$ + ... تالاتناہی

اور چونکہ موخرالذکر سلسلہ ر کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے مستدق ہے اس لئے پہلا سلسلہ بھی مستدق ہے .... (دفعہ ۲)

اسی طرح سے سلسلہ

ر جب طہ + $\frac{\text{ر}^{۲}\ \text{جب ۲ طہ}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{ر}^{۳}\ \text{جب ۳ طہ}}{\lfloor ۳}$ + ...

بھی مستدق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ $\text{و}^{\text{لا}}$ کا سلسلہ ہمیشہ مستدق ہوتا ہے۔

۵۸ ـ پس اگر لا کوئی ملتف مقدار ہو تو $\text{و}^{\text{لا}}$ سلسلہ

۱ + لا + $\frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳}$ + ...

کو لکھنے کا ایک مختصر طریقہ ہوا۔

یاد رہے کہ سوائے اُس صورت کے کہ جب لا حقیقی ہو، مقدار $\text{و}^{\text{لا}}$ میں و سے مراد سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

نہیں ہے۔

جب لا ملتف ہو تو $\text{و}^{\text{لا}}$ اُسی شکل کے ایک سلسلہ کو تعبیر کرتا ہے جو سلسلہ کہ لا کے حقیقی ہونے کی صورت میں

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots\right)^{\text{لا}}$$

کے برابر ثابت کیا جا چکا ہے۔

۵۹ — اُسی قسم کے ثبوت سے جو سی سمتھ کے الجبرا دفعہ ۳۰۴ میں دیا گیا ہے یہ آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}}\,\text{و}^{\text{ما}} = \text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}$$

جہاں لا اور ما خواہ حقیقی ہوں خواہ ملتف۔

پس لا اور ما کے ملتف ہونے کی صورت میں بھی تفاعیل $\text{و}^{\text{لا}}$ اور $\text{و}^{\text{ما}}$ قوت نما کے معمولی ضوابط کے تابع رہتے ہیں۔

۶۰ — اگر لا کی بجائے خ طہ رکھا جائے جہاں طہ حقیقی ہے تو

$$\text{و}^{\text{خ طہ}} = 1 + \text{خ طہ} + \frac{\text{خ}^2\,\text{طہ}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{خ}^3\,\text{طہ}^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{\text{طہ}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{طہ}^4}{\lfloor 4} - \frac{\text{طہ}^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

$$+\ \text{خ}\left[\text{طہ} - \frac{\text{طہ}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{طہ}^5}{\lfloor 5} - \frac{\text{طہ}^7}{\lfloor 7} + \cdots\cdots\right]$$

$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} \ldots\ldots$ (دفعات ۳۱، ۳۲)

لہٰذا $\text{و}^{-\text{خ طہ}} = \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}$

پس عمل جمع سے $\text{جم طہ} = \dfrac{\text{و}^{\text{خ طہ}} + \text{و}^{-\text{خ طہ}}}{۲}$

اور عمل تفریق سے $\text{جب طہ} = \dfrac{\text{و}^{\text{خ طہ}} - \text{و}^{-\text{خ طہ}}}{۲\,\text{خ}}$

ملتف زاویوں کے تفاعیل مستدیرہ

۶۱ — اگر لا کوئی ملتف مقدار ہو تو اب تک تفاعیل جب لا اور جم لا کو کوئی معنی نہیں دئے جا سکتے۔

ہم پہلے دفعات ۳۲، ۳۳ میں ثابت کر چکے ہیں کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{|۳} + \frac{\text{لا}^۵}{|۵} - \frac{\text{لا}^۷}{|۷} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{|۲} + \frac{\text{لا}^۴}{|۴} - \frac{\text{لا}^۶}{|۶} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

فرض کرو کہ ہم جب لا اور جم لا کی تعریف ہی اس طرح کرتے ہیں کہ لا کے ملتف ہونے کی صورت میں اِن سے بالترتیب اوپر کے سلسلے مراد ہوتے ہیں، یعنی فرض کرو کہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{|۳} + \frac{\text{لا}^۵}{|۵} - \frac{\text{لا}^۷}{|۷} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (۱)$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{|۲} + \frac{\text{لا}^۴}{|۴} - \frac{\text{لا}^۶}{|۶} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (۲)$$

جس صورت میں لا ملتف ہو تو سلاسل بالا کی بائیں جانب سے

مکتوں کو بالتفصیل لکھنے کی بجائے ہم ان کو محض اختصار کی خاطر جب لا اور جم لا سے تعبیر کرتے ہیں۔

۶۲۔ تب لا کی تمام (حقیقی یا ملتف) قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} + \text{خ جب لا} = 1 + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} - \frac{\text{خ لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \cdots$$

$$= 1 + \text{خ لا} + \frac{(\text{خ لا})^2}{\lfloor 2} + \frac{(\text{خ لا})^3}{\lfloor 3} + \frac{(\text{خ لا})^4}{\lfloor 4} + \cdots$$

$$= \text{و}^{\text{خ لا}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{دفعہ } 56)$$

لہذا $\text{جم لا} - \text{خ جب لا} = \text{و}^{-\text{خ لا}}$

پس لا کی تمام حقیقی یا ملتف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{2} \quad \text{اور} \quad \text{جب لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{2\,\text{خ}}$$

ان مقادیر کو **آئیلر کی قوت نما قیمتیں** کہتے ہیں۔

۶۳۔ اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ جمع اور تفریق کے مثلثی ضابطے خیالی زاویوں کے لئے بھی درست ہوتے ہیں، یعنی یہ کہ لا خواہ حقیقی ہو یا ملتف

جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

جم (لا + ما) = جم لا جم ما − جب لا جب ما

جب (لا − ما) = جب لا جم ما − جم لا جب ما

اور جم (لا − ما) = جم لا جم ما + جب لا جب ما

چونکہ $\text{جم لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{2}$ اور $\text{جب لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{2\,\text{خ}}$

اسلئے جب لا جم ما + جم لا جب ما = (و^{خ لا} − و^{−خ لا})/۲خ × (و^{خ ما} + و^{−خ ما})/۲ + (و^{خ لا} + و^{−خ لا})/۲ × (و^{خ ما} − و^{−خ ما})/۲خ

= (۲ × و^{خ لا} و^{خ ما} − ۲ × و^{−خ لا} و^{−خ ما})/۴خ = (و^{خ(لا+ما)} − و^{−خ(لا+ما)})/۲خ ..... دفعہ ۵۹

= جب (لا + ما)

اسی طرح سے باقی نتائج بھی ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

۶۴۔ جو کچھ اوپر بیان ہوا اِس سے ظاہر ہے کہ جو مثلثی ضوابط حقیقی زوایا کے واسطے ثابت کئے جا چکے ہیں اور جمع اور تفریق کے نظریات پر مبنی ہیں وہ سب اُس صورت میں بھی درست رہتے ہیں جب ہم حقیقی زوایا کی بجائے کوئی ملتف مقداریں مندرج کردیں۔

مثلاً اگر طہ حقیقی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

جم ۳ طہ = ۴ جم^۳ طہ − ۳ جم طہ

اسلئے جم ۳ (لا + خ ما) = ۴ جم^۳ (لا + خ ما) − ۳ جم (لا + خ ما)

نیز چونکہ ڈمی مائیرے کے مسئلہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر طہ حقیقی ہو تو ن کی کسی قیمت کے واسطے

جم ن طہ + خ جب ن طہ (جم طہ + خ جب طہ)^ن کی ن قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے اسلئے جم ن (لا + خ ما) + خ جب ن (لا + خ ما)

ہمیشہ {جم (لا + خ ما) + خ جب (لا + خ ما)}^ن کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہوگی

۶۵۔ ملتف تفاعیل مستدیرہ کے ادوار۔

دفعہ ۶۳ کی مساواتوں (۱)، (۲) میں فرض کرو کہ لا کوئی ملتف مقدار ہے اور نیز فرض کرو کہ

ما = ۲π

جب جب (لا + ۲ π) = جب لا جم ۲ π + جم لا جب ۲ π
= جب لا

اور جم (لا + ۲ π) = جم لا جم ۲ π − جب لا جب ۲ π
= جم لا

پس جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا اگر لا میں ۲π اضافہ کردیا جائے، اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا میں

۴π، ۶π ، . . . ۲ ن π

اضافہ کردیا جائے تو بھی جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا۔ لہٰذا اگر لا ملتف ہو تو جب لا اور جم لا دوری تفاعل ہیں جنکا دور ۲π ہے۔

یہ نتیجہ اُن نتائج کے عین موافق ہے جو حقیقی زوایا کے واسطے حصہ اول دفعہ ۶۷ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔

امثلہ ۱۰

اگر یہ تسلیم کرلیا جائے کہ جم لا = (وخلا + و−خلا)/۲ اور جب لا = (وخلا − و−خلا)/۲خ

تو ثابت کروکہ لا اور ما کی تمام (حقیقی یا ملتف) قیمتوں کے واسطے

۱۔ جم² لا + جب² لا = ۱ ۲۔ جم (− لا) = جم لا

۳۔ جب (− لا) = − جب لا ۴۔ جم ۲ لا = جم² لا − جب² لا = ۱ − ۲ جب² لا

۵۔ جب ۳ لا = ۳ جب لا − ۴ جب³ لا ۶۔ جم لا − جم ما = ۲ جب (لا + ما)/۲ جب (ما − لا)/۲

۷۔ جب لا − جب ما = ۲ جم (لا + ما)/۲ جب (لا − ما)/۲

ثابت کرو کہ

$$\text{۸}-\left\{\text{جب}\,(\text{عہ}+\text{طہ})-\text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{جب طہ}\right\}^{\text{ن}}=\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{قو}^{-\text{خ ن طہ}}$$

$$\text{۹}-\text{جب}\,(\text{عہ}+\text{ن طہ})-\text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{جب ن طہ}=\text{قو}^{-\text{خ ن طہ}}\,\text{جب عہ}$$

$$\text{۱۰}-\left\{\text{جب}\,(\text{عہ}-\text{طہ})\pm\text{قو}^{\pm\text{خ عہ}}\,\text{جب طہ}\right\}^{\text{ن}}=\text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{طہ}\left\{\text{جب}\,(\text{عہ}-\text{ن طہ})\pm\text{قو}^{\pm\text{خ عہ}}\,\text{جب ن طہ}\right\}$$

۶۶- دفعہ ۶۲ کے ضوابط میں اگر ا کوئی خالص خیالی مقدار ہو اور خ ما کے مساوی ہو تو

چونکہ $\text{خ}^{۲}=-۱$

$$\text{اسلئے جم خ ما}=\frac{\text{قو}^{\text{خ}\times\text{خ ما}}+\text{قو}^{-\text{خ}\times\text{خ ما}}}{۲}=\frac{\text{قو}^{-\text{ما}}+\text{قو}^{\text{ما}}}{۲}=\frac{\text{قو}^{\text{ما}}+\text{قو}^{-\text{ما}}}{۲}$$

$$\text{اور جب خ ما}=\frac{\text{قو}^{\text{خ}\times\text{خ ما}}-\text{قو}^{-\text{خ}\times\text{خ ما}}}{۲\text{خ}}=\frac{\text{قو}^{-\text{ما}}-\text{قو}^{\text{ما}}}{۲\text{خ}}=\text{خ}\,\frac{\text{قو}^{-\text{ما}}-\text{قو}^{\text{ما}}}{۲(-۱)}=\text{خ}\,\frac{\text{قو}^{\text{ما}}-\text{قو}^{-\text{ما}}}{۲}$$

۶۷- زائدی تفاعیل - تعریف - مقدار

$$\frac{\text{قو}^{\text{ما}}-\text{قو}^{-\text{ما}}}{۲}$$

کو خواہ ما حقیقی ہو یا ملتف ہمیشہ ما کی زائدی جیب کہتے ہیں اور کتابت میں اسے اختصاراً **جبز ما** سے تعبیر کرتے ہیں۔

اسی طرح سے مقدار

$$\frac{\text{قو}^{\text{ما}}+\text{قو}^{-\text{ما}}}{۲}$$

کو ما کی زائدی جیب التمام کہتے ہیں اور کتابت میں اختصاراً **جمز ما** سے تعبیر کرتے ہیں۔

[بغور دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جبز ما اور جمز ما کی قیمتیں بالترتیب جب ما اور جم ما کی قوت نما قیمتوں میں علامات خ کو حذف کر دینے سے حاصل ہوتی ہیں]

زائدی مماس، مماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں زائدی جیب اور

جیب التمام سے اسی طرح سے معلوم کی جاتی ہیں جس طرح سے کہ معمولی مماس، مماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثلاً

$$\text{مسز ما} = \frac{\text{جبنز ما}}{\text{جمز ما}} = \frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}$$

$$\text{تمز ما} = \frac{۱}{\text{جبنز ما}} = \frac{۲}{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}$$

$$\text{قطز ما} = \frac{۱}{\text{جمز ما}} = \frac{۲}{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}$$

$$\text{ممز ما} = \frac{۱}{\text{مسز ما}} = \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}$$

زائدی جیوب اور جیوب التمام کو ایک منحنی کے ساتھ جس کو قائم ہذلولی یا قائم قطع زائد کہتے ہیں وہی تعلق ہے جو معمولی جیوب اور جیوب التمام کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ اسی وجہ سے لفظ زائدی کا استعمال کیا گیا۔

۶۸ ـ دفعات ۶۶، ۶۷ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جم}(\text{خ ما}) = \text{جمز ما}$$

$$\text{اور جب}(\text{خ ما}) = \text{خ جبز ما}$$

$$\text{اسلئے مس}(\text{خ ما}) = \text{خ مسز ما}$$

۶۹ ـ علم مثلث کے اُن عام ترین ضوابط کے جواب میں جو زوایا کی نسبتوں سے متعلق ہیں ہذلولی نسبتوں کے ضوابط کا بھی ایک نظام ہے مثلاً ہمیں معلوم ہے کہ زاویہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم}^{۲}\,\text{طہ} + \text{جب}^{۲}\,\text{طہ} = ۱$$

$$\text{پس}\quad \text{جم}^{۲}(\text{خ طہ}) + \text{جب}^{۲}(\text{خ طہ}) = ۱$$

لہذا دفعہ گذشتہ کی رو سے

$$\text{جمز}^{۲}\,\text{طہ} - \text{جبنز}^{۲}\,\text{طہ} = ۱$$

[یہ نتیجہ زائدی تفاعیل کی تعریف سے بھی براہِ راست حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{جمز}^{2}\,\text{طہ} - \text{جبز}^{2}\,\text{طہ} = \left(\frac{\text{و}^{\text{طہ}} + \text{و}^{-\text{طہ}}}{۲}\right)^{2} - \left(\frac{\text{و}^{\text{طہ}} - \text{و}^{-\text{طہ}}}{۲}\right)^{2}$$

$$= \frac{\text{و}^{۲\text{طہ}} + ۲ + \text{و}^{-۲\text{طہ}}}{۴} - \frac{\text{و}^{۲\text{طہ}} - ۲ + \text{و}^{-۲\text{طہ}}}{۴} = ۱\ ]$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ ی اور د کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب}\,(\text{ی} + \text{د}) = \text{جب ی جم د} + \text{جم ی جب د}$$

ی کی بجائے خ لا اور د کی بجائے خ ما رکھنے سے

$$\text{جب}\,[\text{خ}\,(\text{لا} + \text{ما})] = \text{جب خ لا جم خ ما} + \text{جم خ لا جب خ ما}$$

تب دفعۂ ماقبل کی رو سے

$$\text{خ جبز}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{خ جبز لا جمز ما} + \text{جمز لا} \times \text{خ جبز ما}$$

$$\therefore \text{جبز}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جبز لا جمز ما} + \text{جمز لا جبز ما}$$

[براہ راست زائدی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\text{جبز لا جمز ما} + \text{جمز لا جبز ما}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{۲} \times \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲} + \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{۲} \times \frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$$

جو عمل ضرب سے $= \frac{۲\,\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}} - ۲\,\text{و}^{-(\text{لا}+\text{ما})}}{۴} = \text{جبز}\,(\text{لا} + \text{ما})$]

نیز ہمیں معلوم ہے کہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{مس ۳ طہ} = \frac{\text{۳ مس طہ} - \text{مس}^{3}\,\text{طہ}}{۱ - ۳\,\text{مس}^{2}\,\text{طہ}}$$

اس میں طہ کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\text{مس}\,(۳\,\text{خ لا}) = \frac{۳\,\text{مس}\,(\text{خ لا}) - \text{مس}^{3}\,(\text{خ لا})}{۱ - ۳\,\text{مس}^{2}\,(\text{خ لا})}$$

اس لئے دفعہ ۶۸ کی رُو سے

$$\text{خ مسز(۳لا)} = \frac{\text{۳خ مسزلا} - \text{خ}^{3}\ \text{مسز}^{3}\text{لا}}{\text{۱} - \text{۳خ}^{2}\ \text{مسز}^{2}\text{لا}}$$

$$\text{پس مسز۳لا} = \frac{\text{۳ مسزلا} + \text{مسز}^{3}\text{لا}}{\text{۱} + \text{۳ مسز}^{2}\text{لا}}$$

حسب سابق اسکا ثبوت بھی مسزلا کی تعریف سے بآسانی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۷۰۔ عام طور پر دفعہ ۶۸ کی مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی عام ضابطہ میں جو زوایا کی جیوب التمام کے لئے درست ہو 'جم' کی بجائے جمز پڑھیں تو بھی ضابطہ مذکور درست رہے گا۔ نیز چونکہ جب۲ (خ ما) = ۔ جبز۲ ما اسلئے دفعہ مذکورہ بالا کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں کوئی ایسا ضابطہ معلوم ہو جس میں کسی زاویہ کی جیب کا مربع اور جیب التمام دونوں شامل ہوں تو اس ضابطہ میں 'جم' کی بجائے 'جمز' اور 'جب۲' کی بجائے '۔ جبز۲' لکھنے سے جو ضابطہ حاصل ہوگا وہ بھی درست ہوگا۔

اسی طرح مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ہم کسی ضابطہ کو جس میں 'مس۲' شامل ہو محض مس۲ کی بجائے '۔مسز۲' لکھنے سے ایک متشابہ ضابطہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ سے ہم دفعات ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۴۴، ۴۶، اور ۴۸ ۔ ۵۳ سے اور نیز حصۂ اول کی دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ سے ایسے متشابہ سلسلے اور ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زائدی تفاعیل پر مشتمل ہوں

۷۱۔ (دفعہ ۵۶ کے سلسلہ کو مدنظر رکھتے ہوئے) دفعہ ۶۷ کی رُو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جمز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= 1 + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \frac{\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

$$\text{اور جبنز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} + \frac{\text{لا}^7}{\lfloor 7} + \cdots\cdots$$

یہ جمز لا اور جبنز لا کی تفصیلی قیمتیں کہلاتی ہیں ۔

۷۲ ۔ زائدی تفاعیل کے ادوار ۔

ہم جانتے ہیں کہ ط کی تمام حقیقی یا ملتف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم خ ط} = \text{جمز ط}$$

$$\text{اس لئے جمز}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{جم}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما})\text{خ}\right\} = \text{جم}(\text{خ لا} - \text{ما})$$

$$= \text{جم}\left[-2\pi + \text{خ لا} - \text{ما}\right] \quad \cdots \quad \text{دفعہ ۶۵}$$

$$= \text{جم}\left[(2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما})\text{خ}\right] = \text{جمز}\left[2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right]$$

$$= \text{اسی طرح سے جمز}\left[4\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right] = \cdots\cdots$$

پس ثابت ہوا کہ زائدی جیب التمام ایک دوری تفاعل ہے جس کا دور خیالی ہے اور '$2\,\text{خ}\,\pi$' کے مساوی ہے ۔

نیز چونکہ جبنز ط = ـ خ جب خ ط اسلئے

$$\text{جبنز}(\text{لا} + \text{خ ما}) = -\text{خ جب}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما})\text{خ}\right\}$$

$$= -\text{خ جب}\left\{\text{خ لا} - \text{ما}\right\}$$

$$= -\text{خ جب}\left[-2\pi + \text{خ لا} - \text{ما}\right]$$

$$= -\text{خ جب}\left\{\left[2\pi\,\text{خ} + \text{لا} + \text{خ ما}\right]\text{خ}\right\}$$

= جبز [۲π خ + لا + خ ما]

پس جبز (لا + خ ما) کا دور ۲π خ ہے۔

اسی طرح سے بتایا جا سکتا ہے کہ مسز (لا + خ ما) کا دور خ π ہوتا ہے
زائدی تفاعلوں کا دور حقیقی نہیں ہوتا بلکہ خیالی ہوتا ہے، اس لحاظ سے
زائدی تفاعیل، مستدیر تفاعیل سے اختلاف رکھتے ہیں۔

۴۷ - مشق ۱ — جب (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

جب (عہ + خ بہ) = جب عہ جم خ بہ + جم عہ جب خ بہ

$$= \text{جب عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{ب}} + \text{و}^{-\text{ب}}}{۲} + \text{جم عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{ب}} - \text{و}^{-\text{ب}}}{۲\ \text{خ}}$$

$$= \text{جب عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{ب}} + \text{و}^{-\text{ب}}}{۲} + \text{خ جم عہ}\ \frac{\text{و}^{\text{ب}} - \text{و}^{-\text{ب}}}{۲}$$

= جب عہ جمز بہ + خ جم عہ جبز بہ

مشق ۲ — مس (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔
ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{مس (عہ + خ بہ)} = \frac{\text{جب (عہ + خ بہ)}}{\text{جم (عہ + خ بہ)}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}}{\text{۲ جم (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}} = \frac{\text{جب ۲ عہ + جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جم ۲ خ بہ}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}} \quad \text{. . . . . (دفعہ ۲۸)}$$

متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مس (عہ + خ بہ) = لا + خ ما

س مس (عہ - خ بہ) = لا - خ ما

∴ لا = ½ [مس (عہ + خ بہ) + مس (عہ - خ بہ)]

= جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ) + جم (عہ + خ بہ) جب (عہ - خ بہ) / ۲ جم (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)

= جب ۲ عہ / جم ۲ عہ + جم ۲ خ بہ = جب ۲ عہ / جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ

ما = ۱/۲خ {مس (عہ + خ بہ) - مس (عہ - خ بہ)}

= ۱/۲خ × جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ) - جم (عہ + خ بہ) جب (عہ - خ بہ) / جم (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)

= ۱/خ × جب ۲ خ بہ / جم ۲ عہ + جم ۲ خ بہ = جبز ۲ بہ / جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ

مس (عہ + خ بہ) = جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ / جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ

ق ۳- جمز (عہ + خ بہ) کے حقیقی اور غیر حقیقی حصے الگ
الگ کرو۔

س معلوم ہے کہ جمز (عہ + خ بہ) = و^(عہ+خ بہ) + و^-(عہ+خ بہ) / ۲ ... دفعہ ۶۷

= و^عہ × و^(خ بہ) + و^-عہ × و^-(خ بہ) / ۲

= و^عہ (جم بہ + خ جب بہ) + و^-عہ (جم بہ - خ جب بہ) / ۲ ...... دفعہ ۶۲

= جم بہ (و^عہ + و^-عہ) + خ جب بہ (و^عہ - و^-عہ) / ۲

= جم بہ جمز عہ + خ جب بہ جبز عہ

متبادل ثبوت

جمز (عہ + خ بہ) = جم {(عہ + خ بہ) خ} ...... دفعہ ۶۸

= جم {خ عہ - بہ} = جم (خ عہ) جم بہ + جب (خ عہ) جب بہ

= جمز عہ جم بہ + خ جبز عہ جب بہ

امثلہ ۱۱

ثابت کرو کہ

۱- جمز ۲ لا = ۱ + ۲ (جبز لا)^2 = ۲ (جمز لا)^2 - ۱

۲- جمز (عہ + بہ) = جمز عہ جمز بہ + جبز عہ جبز بہ

۳- جمز (عہ + بہ) - جمز (عہ - بہ) = ۲ جبز عہ جبز بہ

۴- مسز (عہ + بہ) = $\frac{\text{مسز عہ + مسز بہ}}{\text{۱ + مسز عہ مسز بہ}}$

۵- جمز ۳ لا = ۴ جمز^3 لا - ۳ جمز لا

۶- جبز ۳ لا = جبز لا + ۴ جبز^3 لا

۷- جبز (لا + ما) جمز (لا - ما) = $\frac{1}{2}$ (جبز ۲ لا + جبز ۲ ما)

۸- جمز ۲ لا + جمز ۵ لا + جمز ۸ لا + جمز ۱۱ لا = ۴ جمز $\frac{\text{۱۳ لا}}{2}$ جمز ۳ لا جمز $\frac{\text{۳ لا}}{2}$

۹- جمز لا + جمز (لا + ما) + جمز (لا + ۲ ما) + جمز (لا + ۳ ما) ..... ن رقموں تک

= $\frac{\text{جمز (لا + } \frac{\text{ن}-1}{2} \text{ ما) جبز } \frac{\text{ن ما}}{2}}{\text{جبز } \frac{\text{ما}}{2}}$

۱۰- جبز لا + جبز (لا + ما) + جبز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جیبز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}-1}{2}\,\text{ما}\right)\ \text{جیبز}\,\frac{\text{ن ما}}{2}}{\text{جیبز}\,\frac{\text{ما}}{2}}$$

۱۱۔ جیبز لا + ن جیبز ۲ لا + $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}$ جیبز ۳ لا + ۔۔۔۔۔۔ (ن + ۱) رقموں تک

$$= 2^{\text{ن}}\ \text{جمز}^{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}}{2}\ \text{جیبز}\left(\frac{\text{ن}}{2}+1\right)\text{لا}$$

۱۲۔ جیبز بہ جب عہ + خ جمز بہ جم عہ = خ جم (عہ + خ بہ)

۱۳۔ جب ۲ عہ + خ جیبز ۲ بہ = ۲ جب (عہ + خ بہ) جم (عہ − خ بہ)

۱۴۔ جم (عہ + خ بہ) + خ جب (عہ + خ بہ) = $\text{ق}^{-\text{بہ}}$ (جم عہ + خ جب عہ)

۱۵۔ اگر مس ما = مس عہ مسز بہ اور مس ی = مم عہ مسز بہ تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جیبز ۲ بہ قم ۲ عہ

۱۶۔ اگر ی = لوک مس $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ط}}{2}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مسز}\,\frac{\text{ی}}{2} = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

۱۷۔ جم (عہ + خ بہ)

۱۸۔ مم (عہ + خ بہ)

۱۹۔ قم (عہ + خ بہ)

۲۰۔ قط (عہ + خ بہ)

۲۱۔ جیبز (عہ + خ بہ)

۲۲۔ مسز (عہ + خ بہ)

۲۳۔ قطز (عہ + خ بہ)

۲۴۔ ثابت کرو کہ $\text{مس}\,\frac{\text{ی} + \text{خ و}}{2} = \frac{\text{جب ی} + \text{خ جیبز و}}{\text{جم ی} + \text{جمز و}}$

۲۵۔ اگر جب (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{جمز}^2\,\text{ب}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{جیبز}^2\,\text{ب}} = 1$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{جب}^2\,\text{ا}} - \frac{\text{ما}^2}{\text{جم}^2\,\text{ا}} = ۱$$

۲۶۔ اگر مس (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

لا² + ما² + ۲ لا مم ۲ ا = ۱

اور لا² + ما² − ۲ ما ممز ۲ ب + ۱ = ۰

۲۷۔ اگر جب (ط + خ ف) = جم ع + خ جب ع تو ثابت کرو کہ

جم² ط = ± جب ع

۲۸۔ اگر جب (ط + خ ف) = ر (جم ع + خ جب ع) تو ثابت کرو کہ

ر² = ½ [جمز ۲ ف − جم ۲ ط] اور مس ع = مسز ف مم ط

۲۹۔ اگر جم (ط + خ ف) = ر (جم ع + خ جب ع) تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ \frac{\text{جب}\,(\text{ط} - \text{ع})}{\text{جب}\,(\text{ط} + \text{ع})}$$

۳۰۔ اگر مس (ط + خ ف) = مس ع + خ قط ع تو ثابت کرو کہ

$\text{لو}^{۲\text{ف}} = \pm\ \text{مم}\ \frac{\text{ع}}{۲}$ اور ۲ ط = ن π + $\frac{\pi}{۲}$ + ع

۳۱۔ اگر مس (ط + خ ف) = جم ع + خ جب ع تو ثابت کرو کہ

$\text{ط} = \frac{\text{ن}\,\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ اور $\text{ف} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ع}}{۲}\right)$

۳۲۔ اگر ا + خ ب = ج مس (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\ ۲\ \text{لا} = \frac{۲\ \text{ج}\ \text{ا}}{\text{ج}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

۳۳۔ اگر مس (ط + خ ف) = جب (لا + خ ما)

تو ممز ۲ ما جبز ۲ ف = مم لا جب ۲ ط

۳۴- اگر مس (عہ + خ بہ) = خ
جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ غیر متعین ہے اور بہ لامتناہی ہے۔

ثابت کرو کہ

۳۵- ½ {جبز لا + جب لا} = لا + لا^۵ / ل۵ + لا^۹ / ل۹ + ... تا لامتناہی

۳۶- ½ {جمز لا + جم لا} = ۱ + لا^۴ / ل۴ + لا^۸ / ل۸ + ... تا لامتناہی

۴۷ ـ مقلوب و مستدیر تفاعل ـ اگر عہ اور بہ دونوں حقیقی ہوں اور عہ = جم بہ تو دفعہ ۳۴۲ حصۂ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ عہ کی مقلوب جیب التمام سے مراد بہ کی وہ قیمت ہے جو ۰ اور π کے درمیان واقع ہے اور یہ بھی اشارۃً مذکور ہو چکا ہے کہ بہ ایک کثیر القیمت مقدار ہوتی ہے۔

اگر اب لا + خ ما = جم (ی + خ د)

تو اسی طرح سے ہم ی + خ د کو لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام کہینگے۔ لیکن چونکہ

لا + خ ما = جم (ی + خ د) = جم [۲ ن π ± (ی + خ د)] .... (دفعہ ۶۵)

اس لئے ظاہر ہے کہ

۲ ن π ± (ی + خ د)

بھی لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ہے جہاں ن سے مراد کوئی صحیح عدد ہے
پس لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ایک کثیر القیمت تفاعل ہے۔
اگر مقلوب جیب التمام کی قیمتوں کی کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو

اس کو جم$^{-1}$ (لا + خ ما) کی بجائے **جم**$^{-1}$ (لا + خ ما) لکھتے ہیں۔ اسی طرح سے دیگر مثلثی نسبتوں کی رموز کا خط نسخ میں لکھا جانا بھی انہی معنوں پر دلالت کرتا ہے نیز لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام کی خاص قیمت سے ۲ ن π ± (ی + خ و) کی ایسی قیمت مراد ہے جس سے کہ ۲ ن π + ی یا ۲ ن π − ی کی قیمت صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

اس قیمت خاص کو جم$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔
تب ظاہر ہے کہ

جم$^{-1}$ (لا + خ ما) = ۲ ن π ± جم$^{-1}$ (لا + خ ما)

۷۵ — اسی طرح سے اگر

لا + خ ما = جیب (ی + خ و) = جیب {ن π + (−۱)^{ن} (ی + خ و)}

تو ن π + (−۱)^{ن} (ی + خ و) کو لا + خ ما کی مقلوب جیب کہتے ہیں یہ بھی ایک کثیر القیمت مقدار ہے اور **جیب**$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کی جاتی ہے۔ نیز اس کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ −π/۲ اور π/۲ کے درمیان واقع ہوتا ہے، اس خاص قیمت کو جیب$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
اس سے ظاہر ہے کہ

جیب$^{-1}$ (لا + خ ما) = ن π + (−۱)^{ن} جیب$^{-1}$ (لا + خ ما)

اسی طرح مس$^{-1}$ (لا + خ ما) اور **مس**$^{-1}$ (لا + خ ما) کی تعریفات بھی حسبہ کی جا سکتی ہیں یعنی مس$^{-1}$ (لا + خ ما) کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ −π/۲ اور +π/۲ کے

بمیان واقع ہوتا ہے - تب ظاہر ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

ی طرح سے

$$\text{قط}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = 2\,\text{ن}\,\pi \pm \text{قط}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

$$\text{قم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\,\text{قم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

$$\text{مم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ن}\,\pi + \text{مم}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

۷ - آیندہ ہم جم$^{-1}$، جب$^{-1}$، جم$^{-1}$ اور جب$^{-1}$ کو انہی معنوں میں استعمال ینگے جو اوپر تجویز کئے گئے ہیں -

۷ - مقلوب زائدی تفاعیل

اگر لا = جمز ما تو بموجب دفعہ ۳۷ ، ما = جمز$^{-1}$ لا

اگر لا حقیقی ہو تو $\text{لا} = \dfrac{\text{ق}^{\text{ما}} + \text{ق}^{-\text{ما}}}{2}$

یعنی $\text{ق}^{2\text{ما}} - 2\,\text{لا}\,\text{ق}^{\text{ما}} + 1 = 0$

س لئے $\text{ق}^{\text{ما}} = \text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^2 - 1}$

$$= \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - 1} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + 1}}$$

$$\therefore \text{ما} = \pm\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - 1}\right)$$

ئیں جانب کے رکن کی علامت ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے -
س ثابت ہوا کہ جب لا حقیقی ہو تو جمز$^{-1}$ لا ایک قیمت والا تفاعل ہے
جبز$^{-1}$ لا اور مسز$^{-1}$ لا کی تعریفات بھی بدستور کی جا سکتی ہیں اور اگر لا حقیقی

ہو تو یہ ایک قیمت والے تفاعل ہیں۔

۷۸۔ اگر عہ + خ بہ = جمز (لا + خ ما) تو لا + خ ما کو عہ + خ بہ کی مقلوب زائدی جیب التمام کہتے ہیں۔

لیکن جمز (لا + خ ما) = جمز {۲ ن خ π ± (لا + خ ما)} ... بموجب دفعہ ۲۷

اس لئے ۲ ن خ π ± (لا + خ ما) مقدار عہ + خ بہ کی مقلوب زائدی جیب التمام ہے اور اسکی خاص قیمت سے مراد اس کی وہ قیمت ہے جس سے اس کا خیالی حصہ ۰ اور π کے درمیان واقع ہو یعنی وہ قیمت جس سے ۲ ن π ± ما، ۰ اور π کے درمیان واقع ہو۔

اسی طرح سے عہ + خ بہ کے مقلوب زائدی جیب و مماس کی بھی تعریفیں کی جا سکتی ہیں۔ ان صورتوں میں ان کی خاص قیمتیں وہ ہونگی جن میں خیالی حصہ $-\frac{\pi}{2}$ خ اور $\frac{\pi}{2}$ خ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷۹۔ **مشق ۱۔** جب$^{-1}$ (جم طہ + خ جب طہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو جہاں طہ حقیقی ہے۔

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ {جم طہ + خ جب طہ} = لا + خ ما

یعنی جم طہ + خ جب طہ = جب (لا + خ ما)

= جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما

اس لئے جب لا جمز ما = جم طہ . . . . (۱)

اور جم لا جبز ما = جب طہ . . . . (۲)

مربع لینے اور جمع کرنے سے

۱ = جب^2 لا جمز^2 ما + جم^2 لا جبز^2 ما = جب^2 لا {۱ + جبز^2 ما} + جم^2 لا جبز^2 ما = جب^2 لا + جبز^2 ما

∴ جبز^2 ما = جم^2 لا

اس لئے اگر جب طہ کو مثبت فرض کیا جائے تو

مساوات (۲) سے جم² لا = جب طہ

اور چونکہ لا، $(-\frac{\pi}{2})$ اور $(+\frac{\pi}{2})$ کے درمیان واقع ہونا چاہیئے ..... وغیرہ

اس لئے جم لا = + √جب طہ یعنی لا = جم⁻¹ (√جب طہ)

تب مساوات (۲) سے

جیبز ما = + √جب طہ

اسلئے قو²ما − ۲ قوما √جب طہ = ۱ جو قوما کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات ہے

لہذا قوما = √جب طہ + √(۱ + جب طہ)

یعنی ما = لوک {√جب طہ + √(۱ + جب طہ)}

مشق ۲ — مس⁻¹ {عہ + خ بہ} کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

فرض کرو کہ مس⁻¹ {عہ + خ بہ} = (لا + خ ما)

یعنی مس (لا + خ ما) = عہ + خ بہ

اور مس (لا − خ ما) = عہ − خ بہ

∴ مس ۲ لا = مس {(لا + خ ما) + (لا − خ ما)}

$$= \frac{(\text{عہ}+\text{خ بہ}) + (\text{عہ}-\text{خ بہ})}{1 - (\text{عہ}+\text{خ بہ})(\text{عہ}-\text{خ بہ})} = \frac{2\,\text{عہ}}{1-\text{عہ}^2-\text{بہ}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{2\,\text{عہ}}{1-\text{عہ}^2-\text{بہ}^2}$$

نیز مس (۲ خ ما) = مس {(لا + خ ما) − (لا − خ ما)}

$$= \frac{(\text{عہ}+\text{خ بہ}) - (\text{عہ}-\text{خ بہ})}{1 + (\text{عہ}+\text{خ بہ})(\text{عہ}-\text{خ بہ})} = \frac{2\,\text{خ بہ}}{1+\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}$$

$$\text{خ}\,\frac{\text{و}^{۲\text{ما}} - \text{و}^{-۲\text{ما}}}{\text{و}^{۲\text{ما}} + \text{و}^{-۲\text{ما}}} = \frac{۲\,\text{خ}\,\text{ب}}{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\therefore \frac{\text{و}^{۲\text{ما}}}{\text{و}^{-۲\text{ما}}} = \frac{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲ + ۲\text{ب}}{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\text{ب}}$$

$$= \frac{(۱+\text{ب})^۲ + \text{ع}^۲}{(۱-\text{ب})^۲ + \text{ع}^۲}$$

$$\therefore \text{ما} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left\{\frac{(۱+\text{ب})^۲ + \text{ع}^۲}{(۱-\text{ب})^۲ + \text{ع}^۲}\right\}$$

نیز مساوات (۱) سے $\text{مسز}\,۲\text{ما} = \frac{۲\text{ب}}{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲}$

اس لئے $\text{ما} = \frac{۱}{۲}\,\text{مسز}^{-۱}\frac{۲\text{ب}}{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲}$

پس $\text{مس}^{-۱}(\text{ع} + \text{خ}\,\text{ب}) = \text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-۱}(\text{ع} + \text{خ}\,\text{ب})$

$$= \text{ن}\,\pi + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\frac{۲\text{ع}}{۱ - \text{ع}^۲ - \text{ب}^۲} + \frac{\text{خ}}{۲}\,\text{مسز}^{-۱}\frac{۲\text{ب}}{۱ + \text{ع}^۲ + \text{ب}^۲}$$

امثلہ ۱۳

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو

۱- $\text{مس}^{-۱}\{\text{جم}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}\}$

۲- $\text{جم}^{-۱}\{\text{جم}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}\}$ ... جہاں ط کوئی مثبت حادہ زاویہ ہے

ثابت کرو کہ

۳- $\text{جبز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + ۱}\right\}$ ۴- $\text{مسز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{جبز}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}$

۵- $\text{جمز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱}\right\}$

۶- $\text{مسز}^{-۱}\,\text{لا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$

۷- $\text{جب}^{-1}(\text{قم طہ}) = \left\{ ۲\text{ن} + (-۱)^{\text{ن}} \right\} \frac{\pi}{۲} + \text{خ}\,(-۱)^{\text{ن}}\ \text{لوک مم}\ \frac{\text{طہ}}{۲}$

۸- $\text{مس}^{-1}(\text{و}^{\text{خ طہ}}) = \frac{\text{ن}\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} - \frac{\text{خ}}{۲}\ \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\text{طہ}}{۲}\right)$

۹- $\text{مس}^{-1} \frac{\text{مس ۲طہ} + \text{مسز ۲فہ}}{\text{مس ۲طہ} - \text{مسز ۲فہ}} + \text{مس}^{-1} \frac{\text{مس طہ} - \text{مسز فہ}}{\text{مس طہ} + \text{مسز فہ}}$

$= \text{مس}^{-1}(\text{مم طہ ممز فہ})$

ذیل کی مقادیر کی ترسیمیں بناؤ جہاں لا سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

۱۰- جبز لا اور قمز لا

۱۱- جمز لا اور قطز لا

۱۲- مسز لا اور ممز لا

باب ششم

ملتف مقادیر کے لوکارتم

۸۰ ـ اگر عہ = $\text{و}^{\text{لا}}$ اور عہ اور لا دونوں حقیقی ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ لا کو عہ کا لوکارتم اساس و پر کہتے ہیں۔

نیز ہم دفعہ ۵ میں بتا چکے ہیں کہ

$$\text{عہ} = \text{و}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{۲}|} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{۳}|} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

اس لئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ اساس و پر عہ کا لوکارتم لا ذیل کی مساوات

$$\text{عہ} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{۲}|} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{۳}|} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی} \quad (۱)$$

کی ایک اصل ہے

اب ہم مندرجہ بالا نتیجہ کو وسعت دیکر یہ معلوم کرینگے کہ ملتف مقادیر کی صورت میں یہ مسئلہ کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۸۱ ـ **تعریف** ـ اگر لا + خ ما کوئی ملتف مقدار ہو اور عہ + خ بہ ایک اور ملتف مقدار ایسی ہو جو $\text{و}^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کے یعنی سلسلہ

$$۱ + (\text{لا} + \text{خ ما}) + \frac{(\text{لا} + \text{خ ما})^{۲}}{\underline{۲}|} + \frac{(\text{لا} + \text{خ ما})^{۳}}{\underline{۳}|} + \ldots\ldots$$

کے مساوی ہو تو لا + خ ما کو مقدار عہ + خ بہ کا ایک لوکارتم کہتے ہیں

لفظ "ایک" کے استعمال کرنے کی وجہ یہ ہے کہ درحقیقت متذکرہ بالا تعریف کے ماتحت کسی مقدار کے اور بھی بہت سے لوکارتم ہوتے ہیں اس امر کی تشریح ذیل میں کیجاتی ہے

عہ + خ بہ = و^لا+خ ما .... (۱)

نیز ہمیں معلوم ہے کہ دفعہ ۶۲ کے مطابق ن کی ایسی تمام قیمتوں کے لیئے جو صحیح اعداد ہوں

و^۲ن خ π = جم ۲ ن π + خ جب ۲ ن π = ۱ .... (۲)

اسلیئے مساواتات (۱) اور (۲) سے ازروئے دفعہ ۵۹

عہ + خ بہ = و^لا+خ ما × و^۲ن خ π = و^لا+(ما+۲ن π) خ

پس متذکرہ بالا تعریف کے ماتحت یہ ظاہر ہے کہ اگر عہ + خ بہ کا لوکارتم لا + خ ما ہو تو

لا + خ ما + ۲ ن π خ

یعنی لا + خ (ما + ۲ ن π)

بھی اس کا ایک لوکارتم ہوگا۔

۸۲ ۔ اب ہم ملتف مقدار عہ + خ بہ کے لوکارتم معلوم کرتے ہیں جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں۔

دفعہ ۲۰ کی رو سے

عہ + خ بہ = ر {جم (۲ ن π + طہ) + خ جب (۲ ن π + طہ)}

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

ر = + √(عہ^۲ + بہ^۲)

[illegible] سے مراد − π ، اور + π کے درمیان ایسا زاویہ ہے کہ جم ط = ع/ر

[illegible] جب ط = ب/ر

یعنی دفعہ ٢٠ کی قیود کے ماتحت

ط = مس⁻¹ ب/ع

پس اگر لا + خ ما ایک لوکارتم ہو ع + خ ب کا،

تو ر [جم (٢ ن π + ط) + خ جب (٢ ن π + ط)] = و^{لا + خ ما}

= و^{لا} × و^{خ ما} .... (دفعہ ٥٩)

= و^{لا} (جم ما + خ جب ما)

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

و^{لا} جم ما = ر جم {٢ ن π + ط}

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

و^{لا} جب ما = ر جب {٢ ن π + ط}

اس لئے و^{لا} = ر اور ما = ٢ ن π + ط

چونکہ لا اور ر دونوں حقیقی ہیں اسلئے لا، ر کا معمولی جبریہ نیپیری لوکارتم ہے

یعنی لا = لوک_و ر

اسلئے ع + خ ب کا ایک لوکارتم

لوک_و ر + خ (٢ ن π + ط)

یعنی لوک_و √(ع² + ب²) + خ (٢ ن π + مس⁻¹ ب/ع) ہے۔

چونکہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہوسکتی ہے اس لئے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ع + خ ب کے لوکارتم تعداد میں لا انتہا ہوتے ہیں اور انکا فرق ٢ π خ کا ضعف ہوتا ہے۔

۸۲ — دفعہ ماقبل کی رو سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ لوکارتم کی اس وسیع تعریف کے ماتحت جو دفعہ ۸۱ میں بیان کی گئی ہے کسی عدد کا لوکارتم ایک کثیر القیمت تفاعل ہوتا ہے یا صاف الفاظ میں ایک عدد کے لاانتہا لوکارتم ہوتے ہیں۔

جب قیمتوں کی اس کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو عہ + خ بہ کے لوکارتم کو لوگ (عہ + خ بہ) لکھا جاتا ہے۔

اسلیے لوگ (عہ + خ بہ) = لوکو $\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$ + خ (۲ ن π + مس$^{-1}$ $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$)

اگر ہم لوگ (عہ + خ بہ) کی مندرجہ بالا قیمت میں ن کو صفر کے برابر فرض کریں تو جملہ محصلہ کو لوگ (عہ + خ بہ) کی خاص قیمت کہتے ہیں اور لوک (عہ + خ بہ) سے تعبیر کرتے ہیں، پس

لوک (عہ + خ بہ) = لوکو $\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$ + خ مس$^{-1}$ $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ اور

لوگ (عہ + خ بہ) = ۲ ن خ π + لوک (عہ + خ بہ)

علامات لوگ اور لوک کو آئندہ اختلاف معنی کے مندرجہ بالا مفہوم کے لحاظ سے استعمال کیا جائیگا۔

۸۳ — ایک مثبت مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے لیکن اس کے خیالی لوکارتموں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے۔

گذشتہ دفعہ کے نتیجہ میں بہ کو صفر کے برابر رکھنے سے

لوگ عہ = ۲ ن خ π + لوکو عہ

اس سے صاف ظاہر ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے ماتحت ہر ایک حقیقی مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے اور یہ معمولاً لوکو عہ سے تعبیر کیا جاتا ہے لیکن غیر حقیقی لوکارتم تعداد میں لاانتہا ہوتے ہیں

...لوکارتم، اس حقیقی لوکارتم میں ٢ ن خ π کا کوئی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ دفعہ ٨٠ کی مساوات (١) سے بھی براہ راست حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ دفعہ مذکورہ کی مساوات لامتناہی درجہ کی مساوات ہے اسلئے اسکی اصلوں کی تعداد بھی لامتناہی ہے جن میں سے حقیقی صرف ایک ہی ہے۔

یہ امر قابل توجہ ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی حقیقی عدد کا جو لوکارتم ہوتا ہے اس کی قیمت خاص، اس عدد کے معمولی جبریہ لوکارتم کے مساوی ہوتی ہے۔

٨٥ — کسی منفی مقدار کا لوکارتم۔ دفعہ ٨٣ کے نتیجہ میں رکھو

به = ٠ اور عه = − لا جہاں لا ایک حقیقی مثبت مقدار ہے

∴ + √(عه² + به²) = + لا

اور مس⁻¹ به/عه [جو ایسا زاویہ ہے کہ اسکی جیب التمام −لا/+لا یعنی −١ ہے اور اس کی جیب صفر ہے بموجب دفعہ ٢٠] = π

∴ لوک (−لا) = ٢ ن خ π + لوکو لا + خ π

اور لوک (−لا) = لوکو لا + خ π

لہٰذا لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی منفی مقدار (−لا) کا جو لوکارتم ہوگا اسکی قیمت خاص، لا کے معمولی جبریہ لوکارتم اور خ π کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

٨٦ — ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو۔ دفعہ ٨٣ کے نتیجہ میں عه کو صفر کے مساوی رکھنے سے

لوك (خ ب) = ۲ ن خ π + لوک ب + خ $\frac{\pi}{۲}$

= لوک ب + خ (۲ ن + $\frac{۱}{۲}$) π

اس سے ثابت ہوا کہ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے جن میں سے پہلا حصہ حقیقی ہوتا ہے اور دوسرا خیالی اور کثیر القیمت -

بطور صورت خاص کے ب = ۱ فرض کرو، تب

لوك ($\sqrt{-۱}$) = خ (۲ ن + $\frac{۱}{۲}$) π

یعنی لوك ($\sqrt{-۱}$) کی قیمت خاص $\frac{\pi}{۲}$ خ ہوتی ہے -

۸۷ - دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں

ط = جم ط

اور ب = جب ط رکھو، تب

لوك (جم ط + خ جب ط)

= لوک$_و$ ۱ + خ (۲ ن π + ط) = خ ط + ۲ ن خ π

اسلئے لوك$_و$ و$^{خ ط}$ = خ ط + ۲ ن خ π

لہٰذا لوك$_و$ و$^{خ ط}$ کی قیمت خاص سے یعنی لوک$_و$ و$^{خ ط}$ سے (ط + ۲ ن π) خ کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جس سے ط + ۲ ن π، − π اور + π کے درمیان واقع ہو -

۸۸ - مشق ۱ - ذیل کی رقم کو اس کے حقیقی اور خیالی حصوں میں تحلیل کرو -

لوك جب (لا + خ ما)

فرض کرو کہ لوك جب (لا + خ ما) = ی + خ د

جس سے و$^{ی + خ د}$ = جب (لا + خ ما)

$$= \text{جب لا جم خ م} + \text{جم لا جب خ م}$$

$$= \text{جب لا}\ \frac{\text{و}^{\text{م}} + \text{و}^{-\text{م}}}{۲} + \text{خ جم لا}\ \frac{\text{و}^{\text{م}} - \text{و}^{-\text{م}}}{۲} \quad ....(۱)$$

بموجب دفعہ ۱۸، فرض کرو کہ مساوات بالا کی بائیں جانب کا رکن

$$\text{ر}\left[\text{جم}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط}) + \text{خ جب}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط})\right]$$

کے مساوی ہے، اسلئے

$$\text{ر} = +\sqrt{\text{جب}^۲\text{لا}\left(\frac{\text{و}^{\text{م}} + \text{و}^{-\text{م}}}{۲}\right)^۲ + \text{جم}^۲\text{لا}\left(\frac{\text{و}^{\text{م}} - \text{و}^{-\text{م}}}{۲}\right)^۲}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{و}^{۲\text{م}} + \text{و}^{-۲\text{م}}) - ۲\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\sqrt{۲\,\text{جمز}\,۲\,\text{م} - ۲\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{جمز}\,۲\,\text{م} - \text{جم}\,۲\,\text{لا}}{۲}}$$

$$\text{اور ط} = \text{مس}^{-۱}\left[\text{مم لا}\ \frac{\text{و}^{\text{م}} - \text{و}^{-\text{م}}}{\text{و}^{\text{م}} + \text{و}^{-\text{م}}}\right] = \text{مس}^{-۱}\left[\text{مم لا مسز م}\right]$$

اس میں ط انہی قیود کے ماتحت ہے جو دفعہ ۲۰ میں بیان کی گئی ہیں۔

تب مساوات (۱) سے

$$\text{و}^{\text{ی}}\,(\text{جم و} + \text{خ جب و}) = \text{ر}\left\{\text{جم}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط}) + \text{خ جب}\,(۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط})\right\}$$

اسلئے $\text{و}^{\text{ی}} = \text{ر}$، جس سے $\text{ی} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ر}$

$$\text{اور و} = ۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط}$$

$$\therefore\ \text{لوک جب}\,(\text{لا} + \text{خ م}) = \text{ی} + \text{خ و}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ر} + (۲\,\text{ن}\,\pi + \text{ط})\,\text{خ}$$

= ۱/۲ لوکو [(جم۲ہا - جم۲لا) / ۲] + خ [۲ن π + مس-۱ (مم لا مسز ہا)]

اس میں ن کو صفر کرنے سے لوک جب (لا + خ ہا) کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے۔

مشق ۲ ـ لوک (-۳) کی عام قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

لا + خ ہا = لوک (-۳)

اسلئے و^(لا + خ ہا) = -۳

دفعہ ۸۱ کی طرح

-۳ = ر { جم (۲ن π + طہ) + خ جب (۲ن π + طہ) } رکھو۔

تب ر = ۳ اور طہ = π

اسلئے ۳ { جم (۲ن π + π) + خ جب (۲ن π + π) }

= و^(لا + خ ہا) = و^لا × و^(خ ہا)

= و^لا { جم ہا + خ جب ہا }

لہذا و^لا = ۳ جس سے لا = لوکو ۳ اور ہا = ۲ن π + π

∴ لوک (-۳) = لوکو ۳ + (۲ن π + π) خ

اس میں ن کو صفر کے مساوی رکھنے سے اس کی قیمت خاص

لوکو ۳ + خ π

حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ ۱۳

ثابت کرو کہ

۱ ـ لوک (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ اگر - π < طہ < + π

۲- لوک (-۱) = خ π

۳- لوک (-خ) = - π/۲ خ

۴- لوک (۱ + جم ۲ط + خ جب ۲ط) = لوکو (۲ جم ط) + خ ط

اگر -π < ط ≯ π

۵- لوک مس (π/۴ + لا/۲ خ) = خ مس^-۱ جبز لا

۶- لوک جم (لا + خ ما) = ½ لوکو ((جمز ۲ما + جم ۲لا)/۲)

- خ مس^-۱ (مس لا مسز ما)

۷- لوک جب (لا + خ ما)/جب (لا - خ ما) = ۲ خ مس^-۱ (قم لا مسز ما)

۸- لوک جم (لا - خ ما)/جم (لا + خ ما) = ۲ خ مس^-۱ (مس لا مسز ما)

۹- خ لوک (لا - خ)/(لا + خ) = π - ۲ مس^-۱ لا

۱۰- لوک (۱ + خ مس ع) = لوکو قطا ع + خ ع .... جہاں ع سے مراد کوئی مثبت حادہ زاویہ ہے،

۱۱- لوک (۱/(۱ - وخ ط)) = لوکو (½ قم ط/۲) + خ (π/۲ - ط/۲)

۱۲- لوک (ا + خ ب)/(ا - خ ب) = ۲ خ مس^-۱ ب/ا

۱۳- لوک (-۵) = لوکو ۵ + (۲ ن π + π) خ

۱۴- لوک (۱ + خ) = ½ لوکو ۲ + خ (۲ ن π + π/۴)

۱۵- لوک لوک جب (لا + خ ما) کی قیمت معلوم کرو۔

۸۹ — $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی تعریف جب ا اور لا کو کی حقیقی یا ملتف مقادیر ہوں

جب ا اور لا حقیقی مقادیر ہوں تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک ا}} \quad .... \quad (\text{دفعہ ۵})$$

لیکن جب ا اور لا دونوں ملتف ہوں تو $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی معمولی جبریہ تعریف قائم نہیں رہتی۔

فرض کرو کہ ہم اس کی (یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی) تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ لا اور ا کی تمام قیمتوں کے واسطے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملتف

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک ا}}$$

اب بموجب دفعہ ۸۳ اگر ا ملتف ہو تو لوک ا کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔ یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ بھی کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔

اسلئے　$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک ا}} = \text{و}^{\text{لا (۲ ن خ ۳ + لوک ا)}}$

$\text{ا}^{\text{لا}}$ کی اس قیمت میں اگر ن کو صفر کر دیا جائے تو محصلہ قیمت $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمت خاص کہلاتی ہے۔

یعنی　$\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمتِ خاص

$$= \text{و}^{\text{لا لوک ا}}$$

$$= ۱ + \text{لا لوک ا} + \frac{\text{لا}^۲}{\underline{|۲}}(\text{لوک ا})^۲ + ... \quad (\text{دفعہ ۵۶})$$

دفعہ ۵۹ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر صرف خاص قیمتوں کا لحاظ رکھا جائے تو

$$\text{ا}^{\text{لا}} \times \text{ا}^{\text{ما}} = \text{ا}^{\text{لا+ما}}$$

یعنی $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی قیمت خاص قوت نماؤں کے جبریہ ضابطہ کو پورا کرتی ہے۔

۹۰ — یہ بھی آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ اگر ما ملتف ہو تو

$$\text{لوک}(۱ + \text{ما}) = \text{ما} - \tfrac{۱}{۲}\,\text{ما} + \tfrac{۱}{۳}\,\text{ما}^۳ - \tfrac{۱}{۴}\,\text{ما}^۴ + ... \text{تا لامتناہی}$$

اس کا ثبوت علاوہ اس ثبوت کے بعینہ متشابہ ہے جو ما کے حقیقی ہونے کی صورت میں دیا گیا ہے۔ دیکھو دفعہ ۸

بالعموم یہ ضروری ہے کہ ما کا مقیاس ایک سے کم ہو کیونکہ ملتف مقداروں کے لئے مسئلہ ثنائی صرف اسی صورت میں درست ہے دیکھو دفعہ ۲۶

جب ما کا مقیاس ایک کے مساوی ہو یعنی جب ہم ما کو جم فہ + خ جب فہ کے مساوی فرض کرسکیں تو یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ تفصیل بالا درست ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ فہ، π کا کوئی طاق ضعف ہو۔

چونکہ لوگ (۱ + ما) = ۲ ن خ π + لوک (۱ + ما)

اس لئے لوگ (۱ + ما) = ۲ ن π + ما − $\frac{1}{2}$ ما^{2} + $\frac{1}{3}$ ما^{3} − $\frac{1}{4}$ ما^{4} + ... تالاتناہی

۹۱— جملہ $(\text{عہ} + \text{خ بہ})^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کے خیالی اور حقیقی حصوں کو الگ الگ کرو

فرض کرو کہ عہ + خ بہ = ر (جم طہ + خ جب طہ)

یعنی بموجب دفعہ ۱۸

$$\text{ر} = +\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \quad \text{اور} \quad \text{طہ} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$$

لہذا حسب تعریف

$$(\text{عہ} + \text{خ بہ})^{\text{لا}+\text{خ ما}} = \text{و}^{(\text{لا}+\text{خ ما})\,\text{لوگ}\,(\text{عہ}+\text{خ بہ})}$$

$$= \text{و}^{(\text{لا}+\text{خ ما})\{\text{لوک}\,(\text{عہ}+\text{خ بہ}) + 2\,\text{م خ}\,\pi\}}$$

$$= \text{و}^{(\text{لا}+\text{خ ما})\{\text{لوک ر} + (\text{طہ} + 2\,\text{م}\,\pi)\,\text{خ}\}}$$

$$= \text{و}^{\{\text{لا لوک ر} - \text{ما}(\text{طہ}+2\,\text{م}\,\pi)\} + \text{خ}\{\text{ما لوک ر} + \text{لا}(\text{طہ}+2\,\text{م}\,\pi)\}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا لوک ر}} \times \text{و}^{-\text{ما}(\text{طہ}+2\,\text{م}\,\pi)} \times \text{و}^{\text{خ}\{\text{ما لوک ر} + \text{لا}(\text{طہ}+2\,\text{م}\,\pi)\}}$$

$$= \text{ر}^{\text{لا}}\ \text{و}^{-\text{ما}(\text{طہ}+2\,\text{م}\,\pi)} \left[\text{جم}\left\{\text{ما لوک ر} + \text{لا}(\text{طہ} + 2\,\text{م}\,\pi)\right\}\right.$$

+ خ جب{ ما لوک ر + لا (ط + ۲م π) }]

م کو صفر کردیں تو جملہ مندرجہ بالا کی قیمت خاص معلوم ہوسکتی

ب ذیل ہے ۔

و^{-اط} [جم (ما لوک ر + لا ط) + خ جب (ما لوک ر + لا ط)]

ق ۱ ۔ (√-۱)^{√-۱} کی قیمت عامہ معلوم کرو۔

(√-۱)^{√-۱} = و^{√-۱ لوک √-۱}

ک √-۱ = لوک [جم (۲ن π + π/۲) + خ جب (۲ن π + π/۲)]

= لوک و^{(۲ن π + π/۲)خ} = (۲ن π + π/۲) خ

. (√-۱)^{√-۱} = و^{(۲ن π + π/۲)خ^۲} = و^{-(۲ن π + π/۲)}

ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

(√-۱)^{√-۱} کی قیمت خاص و^{-π/۲} ہے ۔

۔ لوک_۲ (-۳) کی قیمت عامہ معلوم کرو۔

کرو کہ لوک_۲ (-۳) = لا + خ ما یعنی ۲^{لا+خ ما} = -۳

(ا) لوک ۲ = ۳{جم (۲م π + π) + خ جب (۲م π + π)}.... دفعہ ۲۰

لوک ۲ = ۲ن خ π + لوک_و ۲ اور ۳ = و^{لوک_و ۳}

(لا + خ ما)(۲ن خ π + لوک_و ۲) = و^{لوک_و ۳} × و^{(۲م π + π)خ}

(لا + خ ما)(۲ن خ π + لوک_و ۲) = لوک_و ۳ + (۲م π + π) خ

حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

لا لوک_و ۲ − ۲ن π ما = لوک_و ۳

حصوں کو مساوی رکھنے سے

لا × ۲ن π + ما لوک_و ۲ = ۲م π + π

اگر ان مساواتوں کو حل کیا جائے تو

$$لا = \frac{لوک_و ۳ \; لوک_و ۲ + (۲م π + π) × ۲ن π}{(لوک_و ۲)^۲ + ۴ن^۲ π^۲}$$

$$اور \quad ما = \frac{(۲م π + π) لوک_و ۲ - ۲ن π \; لوک_و ۳}{(لوک_و ۲)^۲ + ۴ن^۲ π^۲}$$

لہذا $لوک_ہ (-۳)$

$$= \frac{\{لوک_و ۳ \; لوک_و ۲ + ۲ن (۲م + ۱) π^۲\} + خ π \{(۲م + ۱) لوک_و ۲ - ۲ن \; لوک_و ۳\}}{(لوک_و ۲)^۲ + ۴ن^۲ π^۲}$$

$م = ن = ۰$ لکھنے سے قیمت خاص حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے

$$\frac{لوک_و ۳ + خ π}{لوک_و ۲}$$

۹۳۔ اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ مختلف مقادیر کے وکارثموں کی عام قیمتیں لوکارثموں کے معمولی ضوابط کو پورا کرتی ہیں

یعنی $لوک \; م ن = لوک \; م + لوک \; ن$

اور $لوک \; \frac{م}{ن} = لوک \; م - لوک \; ن$

نیز یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ $لوک \; م^ن = ن \; لوک \; م + ۲ع خ π$ جہاں ع صفر یا کسی صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کا ثبوت طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے۔

امثلہ ۱۴

ثابت کرو کہ

۱- $ی^خ = تو^{-۲ع π} \{جم (لوک \; ی) + خ \; جب (لوک \; ی)\}$

۲ — $خ^{\frac{۱}{خ}} = جم\left\{\left(۲م + \frac{۱}{۲}\right) ط\, ا\right\} + خ\, جب\left\{\left(۲م + \frac{۱}{۲}\right) ط\, ا\right\}$

۳ — $خ^{خ^{خ}} = جم\, ط + خ\, جب\, ط$

جہاں $ط = \left(۲م + \frac{۱}{۲}\right) ط \times و^{-\left(۲ن ط + \frac{ط}{۲}\right)}$

۴ — $خ^{خ^{خ}}$ .... تا لاتناہی $= ا + خ\, ب$ (جہاں رقم اول الذکر کی صرف خاص قیمتیں لی گئی ہیں) تو ثابت کرو کہ

$مس \frac{ا ط}{۲} = \frac{ب}{ا}$ اور $ا^{۲} + ب^{۲} = و^{-ط ب}$

۵ — اگر $ا^{ع + خ بہ} = ع + خ\, بہ$ تو ثابت کرو کہ

$ع^{۲} + بہ^{۲} = و^{-(۴ن + ۱) ط بہ}$

۶ — اگر $\frac{(۱ + خ)^{ف + خ ق}}{(۱ - خ)^{ف - خ ق}} = ع + خ\, بہ$ تو ثابت کرو کہ $مس^{-۱} \frac{بہ}{ع}$ کی ایک

قیمت $\frac{۱}{۲} ف\, ط + ق\, لوک_{و} ۲$ ہے۔

۷ — اگر $(ا + خ\, ب)^{خ} = م^{لا + خ\, ما}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{ما}{لا}$ کی قیمتوں میں سے ایک

قیمت

$$\frac{۲ مس^{-۱} \frac{ب}{ا}}{لوک_{و} (ا^{۲} + ب^{۲})}$$ ہے۔

۸ — اگر $ا^{ع + خ بہ} = (لا + خ\, ما)^{ف + خ ق}$ اور اس مساوات کی اول الذکر رقم کی صرف خاص قیمتوں سے بحث کی جائے تو ثابت کرو کہ

$ع = \frac{۱}{۲} ف\, لوک_{و}(لا^{۲} + ما^{۲}) - ق\, مس^{-۱} \frac{ما}{لا}\, لوک_{ا} و$

اور $لوک_{ا}(لا^{۲} + ما^{۲}) = \frac{۲ع ف + ۲ بہ ق}{ف^{۲} + ق^{۲}}$

۹ — ثابت کرو کہ $خ^{لوک(۱+خ)}$ کی قیمت خاص کا حقیقی حصہ

$و^{-\frac{\pi^2}{۴}}$ جم $(\frac{\pi}{۴}$ لوک ۲$)$ ہے۔

۱۰ — ثابت کرو کہ $(ا + خ\, ب)^{م + خ\, ن}$ کی قیمت خاص بالتمام حقیقی ہوگی اگر

$\frac{۱}{۲}$ ن لوک $(ا^۲ + ب^۲)$ + م مس$^{-۱}\frac{ب}{ا}$

$\frac{\pi}{۲}$ کا کوئی جفت ضعف ہو اور خیالی ہوگی اگر یہ $\frac{\pi}{۲}$ کا کوئی طاق ضعف ہو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ $(۱ + خ$ مس ع$)^{-خ}$ کی قیمت عامہ

$و^{ع + ۲م\pi}$ [جم {لوک جم ع} + خ جب {لوک جم ع}] ہے۔

۱۲ — اگر $\left(\frac{ا + لا + خ\, ما}{ا - لا - خ\, ما}\right)^{ل + خ\, مہ} =$ لا + خ ما

تو ثابت کرو کہ مس$^{-۱}\frac{ما}{لا}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

ل مس$^{-۱}\left(\frac{۲\, ا\, ما}{ا^۲ - لا^۲ - ما^۲}\right) + \frac{مہ}{۲}$ لوک $\frac{(ا + لا)^۲ + ما^۲}{(ا - لا)^۲ + ما^۲}$ ہوگی۔

۱۳ — ثابت کرو کہ لوث$_{\sqrt{-۱}}(\sqrt{-۱}) = \frac{۴ن + ۱}{۴م + ۱}$

جہاں م اور ن سے کوئی صحیح اعداد مراد ہیں۔

۱۴ — ثابت کرو کہ لوث$_{۴}(-۲)$ کی عام قیمت

$\frac{(لوک\, ۲)^۲ + م(۲ن + ۱)\pi^۲}{۲(لوک\, ۲)^۲ + ۲م^۲\pi^۲} + خ\frac{(۲ن + ۱ - م)\pi\ لوک\, ۲}{۲(لوک\, ۲)^۲ + ۲م^۲\pi^۲}$ ہے

بتاؤ کہ ذیل کے دو سوالوں میں جو استدلال کیا گیا ہے، اس میں کہاں غلطی ہے؟

۱۵ — جب ن کوئی صحیح عدد ہو تو

$و^{۲ن خ\pi} =$ جم ۲ن π + خ جب ۲ن $\pi = ۱$

یعنی $و^{۲خ\pi} = و^{۴خ\pi} = و^{۶خ\pi} = \ldots\ldots$

ان سب کو $\pi\sqrt{-۱}$ کی قوت پر اٹھانے سے

$$و^{-۲\pi} = و^{-۲\pi} = و^{-۶\pi} = \ldots\ldots$$

$$ش \qquad ۲\pi = ۴\pi = ۶\pi = \ldots\ldots$$

۱۶ ۔ ط کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$جم(ط - \pi) + خم جب (ط - \pi) = جم(ط + \pi) + خم جب (ط + \pi)$$

یعنی $\quad و^{خم(ط - \pi)} = و^{خم(ط + \pi)}$

لہذا $\quad ط - \pi = ط + \pi$ یعنی $\pi = ۰$

۱۷ ۔ اگر لا اور ما دو مختلف عدد ہوں اور اُن کی سمت کی خاص قیمتیں ط اور فہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$لوک \; لا \, ما = لوک \; لا + لوک \; ما + ۲ \, ن \, خم \, \pi$$

جہاں ن = – ۱، اگر ط + فہ بڑا ہو π سے،

یا ن = ۰ اگر ط + فہ بڑا ہو $-\pi$ سے اور بڑا نہ ہو π سے،

یا ن = ۱ اگر ط + فہ بڑا نہ ہو $-\pi$ سے ۔

باب ہفتم

گریگوری کا سلسلہ ۔ π کی قیمت کا محسوب کرنا

۹۴ - گریگوری کا سلسلہ -

ثابت کرو کہ اگر طہ ، $-\frac{\pi}{4}$ سے کم نہ ہو اور $+\frac{\pi}{4}$ سے زیادہ نہ ہو تو

طہ = مس طہ - $\frac{1}{3}$ مس^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مس^{5} طہ - ..... تالامتناہی

ظاہر ہے کہ

ا + خ مس طہ = قططہ (جم طہ + خ جب طہ)

= قططہ × و$^{\text{خ طہ}}$

اس لئے دفعہ ۸۳ کی مدد سے

لوک$_{\text{و}}$ قطط طہ + خ طہ = لوک (ا + خ مس طہ)

اسلئے دفعہ ۹۰ کی روسے اگر مس طہ تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو

لوک$_{\text{و}}$ (قطط طہ) + خ طہ

= لوک (ا + خ مس طہ)

= خ مس طہ - $\frac{1}{2}$ خ^{2} مس^{2} طہ + $\frac{1}{3}$ خ^{3} مس^{3} طہ - ....

= خ مس طہ + $\frac{1}{2}$ مس^{2} طہ - $\frac{1}{3}$ خ مس^{3} طہ - $\frac{1}{4}$ مس^{4} طہ + ... تالامتناہی

اس مساوات کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

طہ = مس طہ - $\frac{1}{3}$ مس^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مس^{5} طہ - $\frac{1}{7}$ مس^{7} طہ + ... تالاتناہی

.... (۱)

ظاہر ہے کہ یہ سلسلہ اُن حادہ زاویوں کے لئے درست ہے جن کا مماس تعداداً ایک سے بڑا نہیں ہوتا گویا یہ سلسلہ اُن سب زوایا کے لئے جو $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور نیز زوایا $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے لئے درست ہے۔

۹۵ - دفعہ ماقبل کے سلسلہ میں اگر ہم مس طہ کی بجائے لا لکھیں یعنی جب لا بڑا نہ ہو ۱ سے اور چھوٹا نہ ہو -۱ سے تو ہم سلسلہ بالا کو ذیل کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

مس$^{-1}$ لا = لا - $\frac{1}{3}$ لا^{3} + $\frac{1}{5}$ لا^{5} - $\frac{1}{7}$ لا^{7} + ... لاتناہی

جہاں مس$^{-1}$ لا کی قیمت $-\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہے۔

۹۶ - گریگوری کا سلسلہ ذیل کے عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔

اگر زاویہ طہ کی قیمت ف $\pi - \frac{\pi}{4}$ اور ف $\pi + \frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو یا ان دو انتہائی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو

طہ - ف π = مس طہ - $\frac{1}{3}$ مس^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مس^{5} طہ - .... تالاتناہی

فرض کرو کہ طہ = ف π + فہ جہاں فہ، $\frac{\pi}{4}$ سے بڑا نہیں ہے اور $-\frac{\pi}{4}$ سے چھوٹا نہیں ہے۔

تب ۱ + خ مس طہ = ۱ + خ مس فہ = قط فہ (جم فہ + خ جب فہ)

= قط فہ × و$^{\text{خ فہ}}$

۹۶ ۔ اگر مس ط تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو دفعات ۸۳ اور ۹۰ کی رو سے ظاہر ہے کہ

لوک قطا فہ + خ فہ = لوک (۱ + خ مس ط)

= خ مس ط − $\frac{1}{2}$ خ^2 مس^2 ط + $\frac{1}{3}$ خ^3 مس^3 ط − ....

= خ مس ط + $\frac{1}{2}$ مس^2 ط − $\frac{1}{3}$ خ مس^3 ط + $\frac{1}{4}$ مس^4 ط

+ $\frac{1}{5}$ خ مس^5 ط − .... تا لاتناہی

مساوات بالا کے ہر دو جانب کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے فہ = مس ط − $\frac{1}{3}$ مس^3 ط + $\frac{1}{5}$ مس^5 ط − .... تا لاتناہی

یعنی ط − ف π = مس ط − $\frac{1}{3}$ مس^3 ط + $\frac{1}{5}$ مس^5 ط − .... تا لاتناہی .... (۱)

۹۷ ــ خاص صورتیں ۔

اگر ط، $\frac{3\pi}{4}$ اور $\frac{5\pi}{4}$ کے درمیان یعنی $\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $\pi + \frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو تو ظاہر ہے کہ ف = ۱، تب دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے :-

ط − π = مس ط − $\frac{1}{3}$ مس^3 ط + $\frac{1}{5}$ مس^5 ط − .... تا لاتناہی

اگر ط، $\frac{7\pi}{4}$ اور $\frac{9\pi}{4}$ کے درمیان یعنی $2\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $2\pi + \frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو تو مساوات مذکورہ حسب ذیل ہو جاتی ہے ۔

ط − ۲π = مس ط − $\frac{1}{3}$ مس^3 ط + $\frac{1}{5}$ مس^5 ط − .... تا لاتناہی

اسی طرح سے اگر ط، $-\frac{13\pi}{4}$ اور $-\frac{11\pi}{4}$ کے درمیان یعنی $-3\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $-3\pi + \frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو تو ف = −۳ اور مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

ط + ۳π = مس ط − $\frac{1}{3}$ مس^3 ط + $\frac{1}{5}$ مس^5 ط − .... تا لاتناہی

۹۸ ــ اگر ط، $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$ کے درمیان یا $\frac{5\pi}{4}$ اور $\frac{7\pi}{4}$ کے درمیان

..... یا بالعموم ن $\pi + \frac{\pi}{4}$ اور ن $\pi + \frac{3\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو تو مس طہ تعداداً ایک سے بڑا ہوگا۔ اسلئے ان صورتوں میں لوک (۱ + خ مس طہ) کی تفصیل برقرار نہیں رہیگی، بنابریں دفعہ ۹۶ کی تفصیل (۱) کی سی کوئی تفصیل حاصل نہیں ہوگی۔

۹۹۔ π کی قیمت

گریگوری کے سلسلہ کا ایک خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کے استعمال سے π کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں لا = ۱ رکھو، تب

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\cdots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) \cdots\cdots$$

$$= 1 - 2\left[\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{11 \times 13} + \cdots\cdots\right]$$

اس سلسلہ سے π کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ لیکن اس سلسلہ میں بڑا نقص یہ ہے کہ اس کی رقمیں جلدی جلدی کم نہیں ہوتیں، اس لئے اگر π کی قیمت کافی حد تک درست نکالنا مقصود ہو تو رقوم کی ایک بڑی تعداد لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ لامحالہ اور سلسلے تجویز کرنے پڑے ہیں۔

۱۰۰۔ آئیلر کا سلسلہ

ہم آسانی سے ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

دفعہ ۹۵ میں لا کو بالترتیب

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$

کے مساوی رکھو۔ تب

$$\frac{\pi}{4} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{2^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{3^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

یہ سلسلہ دفعہ ماقبل کے سلسلہ کی نسبت زیادہ جلدی جلدی گھٹتا ہے لیکن π کی قیمت کو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک درست نکالنے کے لئے مس$^{-1}\frac{1}{2}$ کے سلسلہ میں ۱۱ سے زیادہ رقوم لینے کی ضرورت ہے۔

۱۰۱۔ میکن کا سلسلہ

مندرجہ بالا سلاسل سے زیادہ مستدق سلسلہ میکن کا دریافت کردہ ہے جو ذیل کی مساوات سے ماخوذ ہوتا ہے۔

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

..... دفعہ ۲۴۶ حصہ اول مشق ۴

دفعہ ۹۵ میں لا کی بجائے بالترتیب $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{239}$ رکھنے سے

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\times\frac{1}{5^7} + \ldots\ldots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5} - \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \pi = 16\left[\frac{2}{10} - \frac{1}{3}\times\frac{2^3}{10^3} + \frac{1}{5}\times\frac{2^5}{10^5} - \frac{1}{7}\times\frac{2^7}{10^7} + \ldots\ldots\right]$$

$$- 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5} - \ldots\ldots\ldots\right]$$

$۳٫۲ = \frac{۲}{۱۰} \times ۱۶$

$٫۰۰۱۰۲۴ = \frac{۲^{۵}}{۱۰^{۵}} \times \frac{۱}{۵} \times ۱۶$

$٫۰۰۰۰۰۰۹۱۰۲ = \frac{۲^{۹}}{۱۰^{۹}} \times \frac{۱}{۹} \times ۱۶$

. ...

$٫۰۰۰۰۰۰۰۹۷۷ = \frac{۱}{۲۳۹^{۳}} \times \frac{۱}{۳} \times ۴$

$۳٫۲۰۱۰۲۵۰۰۷۹$

$٫۰۴۲۶۶۶۶۶۶۶۶... = \frac{۲^{۳}}{۱۰^{۳}} \times \frac{۱}{۳} \times ۱۶$

$٫۰۰۰۰۲۹۲۵۷۱... = \frac{۲^{۷}}{۱۰^{۷}} \times \frac{۱}{۷} \times ۱۶$

$٫۰۰۰۰۰۰۰۲۹۸... = \frac{۲^{۱۱}}{۱۰^{۱۱}} \times \frac{۱}{۱۱} \times ۱۶$

....

$٫۰۱۶۷۳۶۴۰۱۷... = \frac{۱}{۲۳۹} \times ۴$

$٫۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$

لہذا

$۳٫۲۰۱۰۲۵۰۰۷۹$

$-٫۰۵۹۴۳۲۳۵۵۷$

$۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵/۲۷ = \pi$

π کی یہ قیمت اعشاریہ کے آٹھویں مقام تک درست ہے۔

اگر پہلے سلسلہ میں سے ۱۲ رقوم لی جائیں اور دوسرے سلسلہ میں سے ۳، تو π کی قیمت اعشاریہ کے سولھویں مقام تک درست نکالی جاسکتی ہے

۱۰۲ — روتھر فورڈ کا سلسلہ

میکن کے سلسلہ کو ذیل کی مساوات اور بھی آسان بنا دیتی ہے۔

$$4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{70} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$$

کیونکہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{70} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{99} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\frac{1}{70}-\frac{1}{99}}{1+\frac{1}{99}\times\frac{1}{70}}$

$$= \text{مس}^{-1}\frac{29}{6931} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

امثلہ ۱۵

اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ

$$\text{ط} - \text{ن}\,\pi = \text{مس ط} - \frac{1}{3}\text{مس}^3\text{ط} + \frac{1}{5}\text{مس}^5\text{ط} - \ldots\ldots$$

تو ن کی قیمت معلوم کرو جبکہ ط ذیل کی رقوم کے درمیان واقع ہو

(۱) $\frac{11\pi}{4}$ اور $\frac{13\pi}{4}$ کے (۲) $\frac{7\pi}{4}$ اور $\frac{9\pi}{4}$ کے

(۳) $\frac{19\pi}{4}$ اور $\frac{21\pi}{4}$ کے (۴) $\frac{-3\pi}{4}$ اور $\frac{-5\pi}{4}$ کے

(۵) $\frac{-11\pi}{4}$ اور $\frac{-13\pi}{4}$ کے

۶ — ثابت کرو کہ

$$\pi = 2\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\times 5} - \frac{1}{3^3\times 7} + \ \cdot\ \cdots\right\}$$

۷ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \ldots\ldots\ldots$$

۸ — اگر $\text{لا} < \sqrt{2} - 1$ تو ثابت کرو کہ

$$2\left(\text{لا} - \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{1}{5}\text{لا}^5 \ldots\ldots \ \text{تالاتناہی}\right)$$

$$= \frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\right)^5 - \ldots\ldots\ldots \ \text{تالاتناہی}$$

ذیل کے سلسلوں سے π کی قیمت محسوب کرو جو اعشاریہ کے تیسرے مقام تک درست ہو۔

۹ — آئیلر کے سلسلے سے

۱۰ — ہیکن کے سلسلے سے

۱۱ — روتھر فورڈ کے سلسلے سے

۱۲ — ثابت کرو کہ دوسرے مرتبہ کی مقادیر صغیرہ تک

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{جب}\,ط}\ \text{لوک}\,(1-ط) + \text{مس}^{-1}ط\ \text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+ط\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,ط$$

۱۳ — اگر ط اور $\text{مس}^{-1}(\text{قط}\,ط)$ دونوں صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{قط}\,ط) = \frac{\pi}{4} + \text{مس}^{2}\frac{ط}{2} - \frac{1}{3}\text{مس}^{6}\frac{ط}{2} + \frac{1}{5}\text{مس}^{10}\frac{ط}{2} - \ldots\ldots$$

باب ہشتم

سلسلوں کو جمع کرنا

اور سلسلوں میں پھیلانا

۱۰۳- اب ہم گذشتہ ابواب کے نتائج کو چند مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرنے میں استعمال کرینگے۔

مشہور سلسلوں کو چار اقسام میں منقسم کیا جا سکتا ہے

(۱) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر سلسلۂ ہندسیہ پر مبنی ہوتی ہے۔

(۲) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ ثنائی پر مبنی ہوتی ہے۔

(۳) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ قوت نما پر (جیب اور جیب التمام کے سلسلے بھی اسی میں شامل ہیں) منحصر ہوتی ہے۔

(۴) وہ سلسلے جن کی جمع لوکارتمی سلسلہ پر (گریگوری کا سلسلہ بھی اسی میں شامل ہے) منحصر ہوتی ہے۔

۱۰۴- دفعات ۱۰۵-۱۰۸ میں ہم مندرجہ بالا اقسام میں سے ایک ایک سلسلہ بطور مثال جمع کرینگے۔

نیز جب ضعفی زاویوں کی جیوب (مثلاً جب عہ، جب ۲ عہ، جب ۳ عہ ....) کے کسی سلسلہ کو جمع کرنا مقصود ہو تو ابھی معلوم ہو جائیگا کہ بالعموم انہی ضعفی زاویوں کی جیوب التمام (مثلاً جم عہ، جم ۲ عہ، جم ۳ عہ،)

کے ایک رفیق سلسلہ کو بھی ساتھ ہی جمع کرنا آسان اور سہولت بخش ہوتا ہے۔ یہ طریقہ ذیل کی چار دفعات کو بغور پڑھنے سے بخوبی سمجھ میں آجائے گا۔

۱۰۵ - مشق - سلسلہ

ا + ج جم عہ + ج^{۲} جم ۲ عہ + ج^{۳} جم ۳ عہ + ۔ ۔ ۔ ۔

ن رقوم تک اور نیز لاتناہی تک جمع کرو، اس میں ج ایک سے کم فرض کرو کہ

م ≡ ا + ج جم عہ + ج^{۲} جم ۲ عہ + ۔ ۔ ۔ ج$^{ن-۱}$ جم (ن - ۱) عہ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

اور ج ≡ ج جب عہ + ج^{۲} جب ۲ عہ + ۔ ۔ ۔ ج$^{ن-۱}$ جب (ن - ۱) عہ ۔ ۔ ۔ (۲)

(۲) کو خ سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

م + خ ج = ا + ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج^{۲} (جم ۲ عہ + خ جب ۲ عہ) + ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

= ا + ج و$^{خ عہ}$ + ج^{۲} و$^{۲ خ عہ}$ + ۔ ۔ ۔ + ج$^{ن-۱}$ و$^{(ن-۱) خ عہ}$ ۔ ۔ ۔ (دفعہ ۶۲)

= (ا - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$) / (ا - ج و$^{خ عہ}$) ۔ ۔ ۔ ۔ سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

= (ا - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$) (ا - ج و$^{-خ عہ}$) / (ا - ج و$^{خ عہ}$) (ا - ج و$^{-خ عہ}$)

= (ا - ج و$^{-خ عہ}$ - ج^{ن} و$^{ن خ عہ}$ + ج$^{ن+۱}$ و$^{(ن-۱) خ عہ}$) / (ا - ج (و$^{خ عہ}$ + و$^{-خ عہ}$) + ج^{۲})

= ا - ج (جم عہ - خ جب عہ) - ج^{ن} (جم ن عہ + خ جب ن عہ) + ج$^{ن+۱}$ {جم (ن - ۱) عہ + خ جب (ن - ۱) عہ} / ا - ۲ ج جم عہ + ج^{۲}

پس حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے،

$$\text{م} = \frac{\text{۱} - \text{ج جم عہ} - \text{ج}^{\text{ن}}\,\text{جم ن عہ} + \text{ج}^{\text{ن}+\text{۱}}\,\text{جم (ن} - \text{۱) عہ}}{\text{۱} - \text{۲ ج جم عہ} + \text{ج}^{\text{۲}}}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{ح} = \frac{\text{ج جب عہ} - \text{ج}^{\text{ن}}\,\text{جب ن عہ} + \text{ج}^{\text{ن}+\text{۱}}\,\text{جب (ن} - \text{۱) عہ}}{\text{۱} - \text{۲ ج جم عہ} + \text{ج}^{\text{۲}}}$$

اگر سلسلہ ہذا کا حاصل جمع لا تناہی تک معلوم کرنا مطلوب ہو تو اُن رقوم کو جن میں $\text{ج}^{\text{ن}}$ اور $\text{ج}^{\text{ن}+\text{۱}}$ شامل ہیں چھوڑ دینا کافی ہو گا کیونکہ جب ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے تو یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں۔

$$\text{پس}\quad \text{م}_{\infty} = \frac{\text{۱} - \text{ج جم عہ}}{\text{۱} - \text{۲ ج جم عہ} + \text{ج}^{\text{۲}}}$$

$$\text{اور}\quad \text{ح}_{\infty} = \frac{\text{ج جب عہ}}{\text{۱} - \text{۲ ج جم عہ} + \text{ج}^{\text{۲}}}$$

[نوٹ۔ م اور ح کے لئے جو رقوم اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ سلاسل زیر بحث کی جمع، خیالی مقادیر کے استعمال کے بغیر بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

مساوات (۱) و (۲) کے دونوں جانب مقدار $\text{۱} - \text{۲ ج جم عہ} + \text{ج}^{\text{۲}}$ کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہو گا کہ $\text{ج}^{\text{۲}}$، $\text{ج}^{\text{۳}}$، ۔۔۔ $\text{ج}^{\text{ن}-\text{۱}}$ کے سر غائب ہو جاتے ہیں اور بعدہ، م اور ح کی قیمتیں بآسانی معلوم ہو جاتی ہیں۔]

۱۰۲۔ مشق۔ سلسلہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب عہ} + \frac{\text{۳} \times \text{۱}}{\text{۴} \times \text{۲}}\,\text{جب ۲ عہ} + \frac{\text{۵} \times \text{۳} \times \text{۱}}{\text{۶} \times \text{۴} \times \text{۲}}\,\text{جب ۳ عہ} + \ldots \text{تا لا تناہی}$$

کو جمع کرو۔

فرض کرو کہ

$$\text{ج} = \frac{۱}{۲}\,\text{جب عہ} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{جب ۲عہ} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{جب ۳عہ} + \ldots$$

اور

$$\text{م} = ۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{جم عہ} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{جم ۲عہ} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{جم ۳عہ} + \ldots$$

اس لئے پہلے سلسلہ کو خ سے ضرب دیکر دوسرے سلسلہ میں جمع کرنے سے

$$\text{م} + \text{خ ج} = ۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{\text{خ عہ}} + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\,\text{و}^{\text{۲خ عہ}} + \frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\,\text{و}^{\text{۳خ عہ}} + \ldots$$

$$= (۱ - \text{و}^{\text{خ عہ}})^{-\frac{۱}{۲}} \quad \text{اگر عہ} \neq ۲\,\text{ن}\,\pi$$

مسئلہ ثنائی کی رو سے ... (دفعہ ۱۲)

$$\text{م} + \text{خ ج} = \left\{۱ - \text{جم عہ} - \text{خ جب عہ}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\left(\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲} - \text{خ جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right)\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{عہ}}{۲} - \frac{\pi}{۲}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{عہ}}{۲} - \frac{\pi}{۲}\right)\right\}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}\left\{\text{جم}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}\right\}$$

اب حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{م} = \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}\text{جم}\,\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}$$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \left\{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\right\}^{-\frac{۱}{۲}}\text{جب}\left(\frac{\pi - \text{عہ}}{۴}\right)$$

اگر عہ = ۲ ن π تو ظاہر ہے کہ ج = ۰ اور م = ∞

امثلہ ۱۶

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:۔

(۱) جب عہ + ½ جب ۲ عہ + ⅓ جب ۳ عہ + ... تا لاتناہی

(۲) جم عہ × جم عہ + جم² عہ جم ۲ عہ جم³ عہ جم ۳ عہ + ... تا لاتناہی

(۳) جب عہ × جب عہ + جب² عہ جب ۲ عہ + جب³ عہ جب ۳ عہ + ... تا لاتناہی

جہاں عہ ≠ ط/۲

(۴) جب عہ جم عہ + جب² عہ جم ۲ عہ + جب³ عہ جم ۳ عہ + ... تا لاتناہی

جہاں عہ ≠ ± ط/۲

(۵) جب عہ + ج جب (عہ + بہ) + ج² جب (عہ + ۲ بہ) + ...

ن رقوم تک اور لاتناہی تک

(۶) ۱ + ج جمز عہ + ج² جمز ۲ عہ + ... + ج^(ن-۱) جمز (ن - ۱) عہ

(۷) ج جیر عہ + ج² جیر ۲ عہ + ج³ جیر ۳ عہ + ... تا لاتناہی

(۸) ۱ - ۲ جم عہ + ۳ جم ۲ عہ - ۴ جم ۳ عہ + ... تا ن رقوم

(۹) ۳ جب عہ + ۵ جب ۲ عہ + ۷ جب ۳ عہ + ... تا ن رقوم

(۱۰) اگر عہ = ط/۲ تو مشق (۳) اور مشق (۴) کے سلسلوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱۱) جب عہ + ن جب (عہ + بہ) + ن(ن - ۱)/۲! جب (عہ + ۲ بہ) + ... تا (ن + ۱) رقوم

جہاں ن کسی مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

(۱۲) جب عہ + ½ جب ۳ عہ + (۱ × ۳)/(۲ × ۴) جب ۵ عہ + ... تا لاتناہی

(۱۳) جم^ن عہ - ن جم^(ن-۱) عہ جم عہ + ن(ن - ۱)/۲! جم^(ن-۲) عہ جم ۲ عہ + ...

تا (ن + ۱) رقوم

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

(۱۴) ن جب ء + $\frac{ن(ن+۱)}{۱×۲}$ جب ۲ ء + $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۱×۲×۳}$ جب ۳ ء
+ ... . تا لاتناہی

(۱۵) ۱ + $\frac{۱}{۲}$ جم ۲ ط − $\frac{۱}{۲×۴}$ جم ۴ ط + $\frac{۳×۱}{۲×۴×۶}$ جم ۶ ط ... تالاتناہی

(۱۶) جبز ی + ن جبز ۲ ی + $\frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}$ جبز ۳ ی + ... (ن+۱) رقوم تک

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

۱۰۷ — مشق - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

۱ + $\frac{ج^۲ جم ۲ ط}{\underline{|۲}}$ + $\frac{ج^۴ جم ۴ ط}{\underline{|۴}}$ + ... تالاتناہی

فرض کرو کہ م = ۱ + $\frac{ج^۲ جم ۲ ط}{\underline{|۲}}$ + $\frac{ج^۴ جم ۴ ط}{\underline{|۴}}$ + ... تالاتناہی (۱)

اور ج = $\frac{ج^۲ جب ۲ ط}{\underline{|۲}}$ + $\frac{ج^۴ جب ۴ ط}{\underline{|۴}}$ + ... تالاتناہی (۲)

اسلئے

م + خ ج = ۱ + $\frac{ج^۲ و^{۲خ ط}}{\underline{|۲}}$ + $\frac{ج^۴ و^{۴خ ط}}{\underline{|۴}}$ + ... تالاتناہی

= ۱ + $\frac{ما^۲}{\underline{|۲}}$ + $\frac{ما^۴}{\underline{|۴}}$ + $\frac{ما^۶}{\underline{|۶}}$ + ...

جہاں ج و$^{خ ط}$ یعنی ج (جم ط + خ جب ط) کی بجائے 'ما' لکھا گیا ہے

∴ م + خ ج = $\frac{و^{ما} + و^{-ما}}{۲}$

= $\frac{۱}{۲}$ و$^{ج جم ط + خ ج جب ط}$ + $\frac{۱}{۲}$ و$^{-ج جم ط - خ ج جب ط}$ .... (۳)

= ½ و^(ج جم ط) [جم (ج جب ط) + خ جب (ج جب ط)]

+ ½ و^(-ج جم ط) [جم (ج جب ط) - خ جب (ج جب ط)]

.... (دفعہ ۶۲)

اسلئے حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

م = ½ جم (ج جب ط) [و^(ج جم ط) + و^(-ج جم ط)]

= جم (ج جب ط) جمز (ج جم ط)

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

ج = ½ جب (ج جب ط) {و^(ج جم ط) - و^(-ج جم ط)}

= جب (ج جب ط) جبز (ج جم ط)

متبادل ثبوت

مساوات (۳) سے

م + خ ج = ½ و^((ج جب ط - خ ج جم ط) خ) + ½ و^(-(ج جب ط - خ ج جم ط) خ)

= جم (ج جب ط - خ ج جم ط) .... (دفعہ ۶۲)

= [جم (ج جب ط) جم (خ ج جم ط) + جب (ج جب ط) جب (خ ج جم ط)]

= [جم (ج جب ط) جمز (ج جم ط) + خ جب (ج جب ط) جبز (ج جم ط)] .... دفعہ ۶۶

اس سے م اور ج کی قیمتیں حسب سابق حاصل ہوسکتی ہیں۔

۱۰۸ — مشق۔ ذیل کے دو سلسلوں

ج جب ھ + ج^۲/۲ جب ۲ ھ + ج^۳/۳ جب ۳ ھ + ... تا لاتناہی

اور ج جم ھ + ج^۲/۲ جم ۲ ھ + ج^۳/۳ جم ۳ ھ + ... تا لاتناہی

کو الگ الگ جمع کرو جبکہ ج تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو۔

فرض کرو کہ اوپر کے سلسلے بالترتیب ج اور م کے مساوی ہیں تب حسب سابق

م + خ ج = ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج²/۲ (جم ۲ عہ + خ جب ۲ عہ) + ...

= ج و^(خ عہ) + ج²/۲ و^(۲ خ عہ) + ج³/۳ و^(۳ خ عہ) + ... (۱)

= - لوک [۱ - ج و^(خ عہ)] دفعہ ۹۰ کی رو سے .... (۲)

= - لوک [۱ - ج جم عہ - خ ج جب عہ] .... دفعہ ۹۲

فرض کرو کہ ۱ - ج جم عہ = ر جم طہ اور - ج جب عہ = ر جب طہ

یعنی ر = + √(۱ - ۲ ج جم عہ + ج²) جم طہ = (۱ - ج جم عہ)/ر

اور جب طہ = - (ج جب عہ)/ر

یعنی طہ = مس^(-۱) (- ج جب عہ)/(۱ - ج جم عہ) .. [زیر شرائط دفعہ ۲۰]

∴ م + خ ج = - لوک { √(۱ - ۲ ج جم عہ + ج²) (جم طہ + خ جب طہ) }

= - لوک { √(۱ - ۲ ج جم عہ + ج²) × و^(خ طہ) }

= - لوک √(۱ - ۲ ج جم عہ + ج²) - خ طہ

∴ م = - لوک √(۱ - ۲ ج جم عہ + ج²)

= - ½ لوک (۱ - ۲ ج جم عہ + ج²) .... (۳)

اور ج = - طہ = - مس^(-۱) (- ج جب عہ)/(۱ - ج جم عہ) .... (۴)

مستثنٰی صورتیں

اگر ج = ۱ تو مقدار (۲)

= - لوک [۱ - جم عہ - خ جب عہ] = - لوک [۱ + جم (عہ - π) + خ جب (عہ - π)]

دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ عہ - π، (۲ ن + ۱) π کے برابر ہو یعنی سوائے اس صورت کے جبکہ عہ، ۲ π کا کوئی ضعف ہو۔

اس صورت میں ج = ۰

اور م = ۱ + ½ + ⅓ + ¼ + ...

جو صریحاً ایک متسع سلسلہ ہے

اگر ج = -۱، تو مقدار (۲) = - لوک (۱ + جم عہ + خ جب عہ)

دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ عہ، (۲ ن + ۱) π کے برابر ہو۔

اس صورت میں ج = ۰

اور م = ۱ + ½ + ⅓ + ¼ + ...

پس مقادیر (۳) اور (۴) دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتی ہیں سوائے ان صورتوں کے جب

(۱) ج = ۱ اور عہ = ۲ ن π

(۲) ج = -۱ اور عہ = (۲ ن + ۱) π

(۳) ج > ۱

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان امثلہ میں جن کی جمع لوکارثمی سلسلہ پر مبنی ہوتی اکثر اوقات زاویہ کی خاص خاص قیمتوں کے لئے کوئی حاصل جمع حاصل نہیں ہوتا۔

صورت خاص

اگر ج = جم عہ جہاں عہ، صفر اور π/۲ کے درمیان واقع ہے تو

ج = جم عہ جب عہ + ½ جم² عہ جب ۲عہ + ⅓ جم³ عہ جب ۳ عہ + ...

اس صورت میں

ج = − مس⁻¹ (− جب عہ جم عہ / جب² عہ) ..... بمساوات (۴) سے یعنی

= − مس⁻¹ (− ھم عہ)

= − (عہ − π/۲) . .... (زیر قیود مندرجہ دفعہ ۲۰)

= π/۲ − عہ

امثلہ ۱۷

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

۱ − جب عہ + ج جب (عہ + بہ) + ج²/|۲ جب (عہ + ۲بہ) + ... تالامتناہی

۲ − جم عہ + ج جم (عہ + بہ) + ج²/|۲ جم (عہ + ۲ بہ) + ... تالامتناہی

۳ − ۱ − جم عہ جم بہ + جم² عہ/|۲ جم ۲بہ − جم³ عہ/|۳ جم ۳ بہ + ... تالامتناہی

۴ − جب عہ − جب (عہ + ۲ بہ)/|۲ + جب (عہ + ۴ بہ)/|۴ − .... تالامتناہی

۵ − جم عہ − جم (عہ + ۲ بہ)/|۳ + جم (عہ + ۴ بہ)/|۵ − .... تالامتناہی

۶ − ۱ + جمز عہ + جمز ۲ عہ/|۲ + جمز ۳ عہ/|۳ + ... تالامتناہی

— جبز عہ + $\frac{\text{جبز ۲ عہ}}{\underline{|۲}}$ + $\frac{\text{جبز ۳ عہ}}{\underline{|۳}}$ + ... تالاتناہی

— ۱ + و جم عہ جم (جب عہ) + $\frac{۱}{\underline{|۲}}$ و۲ جم عہ جم (۲ جب عہ) + ... تالاتناہی

— ۱ + و جب عہ جم (جم عہ) + $\frac{\text{و}^{\text{۲ جب عہ}}}{\underline{|۲}}$ جم (۲ جم عہ) + $\frac{\text{و}^{\text{۳ جب عہ}}}{\underline{|۳}}$ جم (۳ جم عہ) + ... تالاتناہی

۱ — $\frac{\text{۵ جم طہ}}{۱}$ + $\frac{\text{۷ جم ۳ طہ}}{\underline{|۳}}$ + $\frac{\text{۹ جم ۵ طہ}}{\underline{|۵}}$ .... تالاتناہی

ذیل کے امثلہ میں ج کو مثبت اور ایک سے کم فرض کیا جائے - اگر ج' ایک کے برابر ہو تو دفعہ ۱۰۸ کے بموجب زاویہ عہ کی بعض قیمتوں کے واسطے مستثنےٰ صورتیں پیدا ہونگی

۱ — ج جب عہ - $\frac{\text{ج}^۲}{۲}$ جب ۲ عہ + $\frac{\text{ج}^۳}{۳}$ جب ۳ عہ - .... تالاتناہی

۱ — ج جب عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جب ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج۵ جب ۵ عہ + ... تالاتناہی

۱۱ — ج جم عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج۵ جم ۵ عہ + ... تالاتناہی

۱۱ — ج جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج۵ جم ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱ — ج جب عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جب ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ ج۵ جب ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱ — جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ جم ۵ عہ - .... تالاتناہی

۱ — ج جم عہ - $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جم (عہ + ۲ بہ) + $\frac{۱}{۵}$ ج۵ جم (عہ + ۴ بہ) - ..... تالاتناہی

۱ — جب عہ جب بہ + $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ عہ جب ۲ بہ + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ عہ جب ۳ بہ + ... تالاتناہی

۱ — ج جب۲ عہ - $\frac{۱}{۲}$ ج۲ جب۲ ۲ عہ + $\frac{۱}{۳}$ ج۳ جب۲ ۳ عہ - .... تالاتناہی

۲ — جبز عہ - $\frac{۱}{۲}$ جبز ۲ عہ + $\frac{۱}{۳}$ جبز ۳ عہ - .... تالاتناہی

= و^ع جم ب − ۱/۳ و^۳ع جم ۳ب + ۱/۵ و^۵ع جم ۵ب − ...... تالاتناہی

— جم π/۳ + ۱/۲ جم ۲π/۳ + ۱/۵ جم ۳π/۳ + ۱/۷ جم ۴π/۳ + ... تالاتناہی

— اگر ط − ع = مس^۲ س/۲ جب ۲ط − ۱/۲ مس^۴ س/۲ جب ۴ط

+ ۱/۳ مس^۶ س/۲ جب ۶ط − ...... تالاتناہی

تو ثابت کرو کہ مس ع = مس ط جم س

— اگر ط اور ف، مثبت حادے زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلہ

ط جم ف + ۱/۳ جب ۳ط جم ۳ف + ۱/۵ جب ۵ط جم ۵ف + ... تالاتناہی

مل جمع π/۴ ہوگا۔ اگر ط > ف، اور صفر ہوگا۔ اگر ط < ف،

ثابت کرو کہ

— مسز لا + ۱/۳ مسز^۳ لا + ۱/۵ مسز^۵ لا + ... تالاتناہی

= مس لا − ۱/۳ مس^۳ لا + ۱/۵ مس^۵ لا − ......

جہاں لا، −π/۴ اور +π/۴ کے درمیان واقع ہے

— ۲ جب^۲ ط + ۱/۲ × ۴ جب^۴ ط + ۱/۳ × ۸ جب^۶ ط + ...

= ۲ {مس^۲ ط + ۱/۳ مس^۶ ط + ۱/۵ مس^۱۰ ط + ...}

جہاں ط، −π/۴ اور +π/۴ کے درمیان واقع ہے۔

— جب ط + ۱/۳ جب^۳ ط + ۱/۵ جب^۵ ط + ...

= ۲ (جب ط − ۱/۳ جب ۳ط + ۱/۵ جب ۵ط − ......

جہاں ط ≠ (۲ن + ۱) π/۲

۱ — اب ہم چند ایسے سلسلوں کی مثالیں درج کرتے ہیں جو نہ تو

مندرجہ بالا ابواب میں سے کسی کے تحت میں آتے ہیں اور نہ باب ۱۹ حصہ اول کے تحت میں۔ ایسی صورتوں میں بالعموم یہ طریقہ کارگر ہوگا کہ ہر ایک رقم کو توڑ کر اسکو دو اور رقوم کے فرق کی شکل میں لکھ لیا جائے۔ اس عمل کے لئے بعض اوقات بڑی فراست کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اگر جواب معلوم ہو تو اس کی مدد سے جمع کرنے کا طریقہ نسبتاً آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ جواب میں ن کی بجائے ایک لکھنے سے ظاہر ہو جاتا ہے کہ پہلی رقم کو کس شکل میں لکھنا چاہیئے۔

مثق ۱۔ سلسلہ

$$\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3} + 3\,\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3^2} + 3^2\,\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3^3} + \cdots\cdots$$

کو ن رقوم تک جمع کرو۔

چونکہ ہمیشہ $\text{جب}\,3\,\text{فہ} = 3\,\text{جب فہ} - 4\,\text{جب}^3\,\text{فہ}$

$$\therefore \quad \text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3} = \frac{1}{4}\left(3\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3} - \text{جب ط}\right)$$

$$3\times\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3^2} = \frac{1}{4}\times 3\left(3\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^2} - \text{جب}\frac{\text{ط}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left[3^2\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^2} - 3\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3}\right]$$

$$3^2\,\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3^3} = \frac{1}{4}\left[3^3\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^3} - 3^2\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^2}\right]$$

....

$$3^{(\text{ن}-1)}\,\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{3^{\text{ن}}} = \frac{1}{4}\left[3^{\text{ن}}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^{\text{ن}}} - 3^{(\text{ن}-1)}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^{(\text{ن}-1)}}\right]$$

پس جمع کرنے سے مطلوبہ حاصل جمع

$$= \frac{1}{4}\left[3^{\text{ن}}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{3^{\text{ن}}} - \text{جب ط}\right]$$

نیز لاانتہا ہی تک حاصل جمع

$$= \frac{1}{4}\left[\text{ط} - \text{جب ط}\right]$$ .... حصہ اول دفعہ ۲۴۳

مشق ۲ ۔ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

مس عہ + ۲ مس ۲ عہ + ۲^{۲} مس ۲^{۲} عہ + ... + ۲$^{ن-۱}$ مس ۲$^{ن-۱}$ عہ

ظاہر ہے کہ

مس عہ = مم عہ − ۲ مم ۲ عہ

مس ۲ عہ = مم ۲ عہ − ۲ مم ۲^{۲} عہ

مس ۲^{۲} عہ = مم ۲^{۲} عہ − ۲ مم ۲^{۳} عہ

مس ۲$^{ن-۱}$ عہ = مم ۲$^{ن-۱}$ عہ − ۲ مم ۲^{ن} عہ

ان قطاروں کو بالترتیب ۱، ۲، ۲^{۲}، ۲^{۳}، ..... ۲$^{ن-۱}$ سے ضرب دینے

اور جمع کرنے سے

مس عہ + ۲ مس ۲ عہ + ۲^{۲} مس ۲^{۲} عہ + ... ۲$^{ن-۱}$ مس ۲$^{ن-۱}$ عہ

= مم عہ − ۲^{ن} مم ۲^{ن} عہ

کیونکہ باقی سب رقوم کٹ جاتی ہیں ۔

لہذا حاصل جمع مطلوب = مم عہ − ۲^{ن} مم ۲^{ن} عہ

مشق ۳ ۔ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو۔

مس عہ مس (عہ + بہ) + مس (عہ + بہ) مس (عہ + ۲ بہ) + [مس (عہ + ۲ بہ)

مس (عہ + ۳ بہ)] + ... تا ن رقوم

فرض کرو کہ ر ویں رقم = ی$_{ر}$ = مس {عہ + (ر − ۱) بہ} مس (عہ + ر بہ)

∴ (ی$_{ر}$ + ۱) مس بہ = [۱ + مس {عہ + (ر − ۱) بہ} مس {عہ + ر بہ}]

× مس [عہ + ر بہ − (عہ + $\overline{ر − ۱}$ بہ)]

= مس [عہ + ر بہ] − مس [عہ + (ر − ۱) بہ] .... دفعہ ۹۸ حصہ اول

پس ر کو بالترتیب ۱، ۲، ...... ن قیمتیں دینے سے

$(۱ + ی_{۱})$ مس بہ = مس (عہ + بہ) − مس عہ

$(۱ + ی_{۲})$ مس بہ = مس (عہ + ۲ بہ) − مس (عہ + بہ)

....

$(۱ + ی_{ن})$ مس بہ = مس (عہ + ن بہ) − مس {عہ + (ن − ۱) بہ}

جمع کرنے سے

$(ن + ج_{ن})$ مس بہ = مس (عہ + ن بہ) − مس عہ

پس $ج_{ن} = \frac{\text{مس (عہ + ن بہ) − مس عہ − ن مس بہ}}{\text{مس بہ}}$

امثلہ ۱۸

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۱۔ قم طہ + قم ۲ طہ + قم ۳ طہ + ... تا ن رقوم

۲۔ قم طہ قم ۲ طہ + قم ۲ طہ قم ۳ طہ + قم ۳ طہ قم ۴ طہ + ... تا ن رقوم

۳۔ قط طہ قط ۲ طہ + قط ۲ طہ قط ۳ طہ + قط ۳ طہ قط ۴ طہ + ... تا ن رقوم

۴۔ قط طہ قط (طہ + فہ) + قط (طہ + فہ) قط (طہ + ۲ فہ) + قط (طہ + ۲ فہ) قط (طہ + ۳ فہ)

+ ..... تا ن رقوم

۵۔ $\frac{۱}{\text{جم عہ + جم ۳ عہ}} + \frac{۱}{\text{جم عہ + جم ۵ عہ}} + \frac{۱}{\text{جم عہ + جم ۷ عہ}} + ...$ تا ن رقوم

۶۔ مس طہ + $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{طہ}{۲}$ + $\frac{۱}{۲^{۲}}$ مس $\frac{طہ}{۲^{۲}}$ + $\frac{۱}{۲^{۳}}$ مس $\frac{طہ}{۲^{۳}}$ + ... تا لاتناہی

۷ — مسز ط + $\frac{1}{2}$ مسز $\frac{\text{ط}}{2}$ + $\frac{1}{2^2}$ مسز $\frac{\text{ط}}{2^2}$ + $\frac{1}{2^3}$ مسز $\frac{\text{ط}}{2^3}$ + ... تا ن رقوم

۸ — مس ط قط ۲ ط + مس ۲ ط قط ۴ ط + مس ۴ ط قط ۸ ط + ... تا ن رقوم

۹ — مس $\frac{\text{ط}}{2}$ قط ط + مس $\frac{\text{ط}}{2^2}$ قط $\frac{\text{ط}}{2}$ + مس $\frac{\text{ط}}{2^3}$ قط $\frac{\text{ط}}{2^2}$ + ... ن رقوم تک اور نیز لاتناہی تک

۱۰ — $\frac{1}{\text{۲ جم ط}}$ + $\frac{1}{\text{۲}^2\text{ جم ط جم ۲ ط}}$ + $\frac{1}{\text{۲}^3\text{ جم ط جم ۲ ط جم ۲}^2\text{ ط}}$ + ... تا ن رقوم

۱۱ — جب ۲ ط جم² ط − $\frac{1}{2}$ جب ۴ ط جم² ۲ ط + $\frac{1}{4}$ جب ۸ ط جم² ۴ ط − ..... تا ن رقوم

۱۲ — جب ۲ ط جب² ط + $\frac{1}{2}$ جب ۴ ط جب² ۲ ط + $\frac{1}{4}$ جب ۸ ط جب² ۴ ط + ... تا ن رقوم

۱۳ — $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط + جم ۲ ط}}$ + $\frac{\text{جب ۲ ط}}{\text{جم ط + جم ۴ ط}}$ + $\frac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جم ط + جم ۶ ط}}$ + ... تا ن رقوم

۱۴ — مس² ع مس ۲ ع + $\frac{1}{2}$ مس² ۲ ع مس ۴ ع + $\frac{1}{2^2}$ مس² ۴ ع مس ۸ ع + ... تا ن رقوم

۱۵ — جم³ ط − $\frac{1}{3}$ جم³ ۳ ط + $\frac{1}{3^2}$ جم³ ۳² ط − $\frac{1}{3^3}$ جم³ ۳³ ط + ... تا ن رقوم

۱۶ — جب³ $\frac{\text{ط}}{3}$ + ۳ جب³ $\frac{\text{ط}}{3^2}$ + ۳² جب³ $\frac{\text{ط}}{3^3}$ + ... تا ن رقوم

۱۷ — $\frac{1}{\text{مم ط − ۳ مس ط}}$ + $\frac{3}{\text{مم ۳ ط − ۳ مس ۳ ط}}$ + $\frac{3^2}{\text{مم ۳}^2\text{ ط − ۳ مس ۳}^2\text{ ط}}$ + ... تا ن رقوم

۱۸ — $\frac{\text{جم ط − جم ۳ ط}}{\text{جب ۳ ط}}$ + ۳ $\frac{\text{جم ۳ ط − جم ۳}^2\text{ ط}}{\text{جب ۳}^2\text{ ط}}$ + ۳² $\frac{\text{جم ۳}^2\text{ ط − جم ۳}^3\text{ ط}}{\text{جب ۳}^3\text{ ط}}$ + ... تا ن رقوم

۱۹ — مس⁻¹ $\frac{4}{4\times 3+1}$ + مس⁻¹ $\frac{6}{9\times 8+1}$ + مس⁻¹ $\frac{8}{16\times 15+1}$ + ... تا ن

۲۰ — مس⁻¹ $\frac{1}{3}$ + مس⁻¹ $\frac{1}{7}$ + مس⁻¹ $\frac{1}{13}$ + مس⁻¹ $\frac{1}{21}$ + ... تا ن رقوم

۲۱ — $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{2}{9} + \dots\dots + \text{مس}^{-1}\frac{2^{\text{ن}-1}}{1+2^{2\text{ن}-1}} \dots$ تا لا متناہی

۲۲ — $\text{جب}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}} + \dots\dots$

$+ \text{جب}^{-1}\frac{\sqrt{\text{ن}}-\sqrt{\text{ن}-1}}{\sqrt{\text{ن}(\text{ن}+1)}} + \dots\dots$ تا لا متناہی

تفصیلیں

۱۱۰ — اعلیٰ ریاضی کی بعض شاخوں میں کبھی کبھی بعض مقادیر کو صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلانے کی ضرورت واقع ہوتی ہے۔ بطور مثال ہم

$$\text{لوک}\,(1 - 2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^2)$$

کی تفصیل ع کی صعودی قوتوں میں معلوم کرتے ہیں۔

چونکہ $2\,\text{جم}\,\text{ط} = \text{و}^{\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-\text{خ}\text{ط}}$

اسلئے $\text{لوک}\,(1 - 2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{ا}^2) = \text{لوک}\left[1 - \text{ا}\,(\text{و}^{\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-\text{خ}\text{ط}}) + \text{ا}^2\right]$

$$= \text{لوک}\left[(1 - \text{ا}\,\text{و}^{\text{خ}\text{ط}})(1 - \text{ا}\,\text{و}^{-\text{خ}\text{ط}})\right]$$

$$= \text{لوک}\,(1 - \text{ا}\,\text{و}^{\text{خ}\text{ط}}) + \text{لوک}\,(1 - \text{ا}\,\text{و}^{-\text{خ}\text{ط}})$$

$$= -\text{ا}\,\text{و}^{\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{2}\text{ا}^2\text{و}^{2\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{3}\text{ا}^3\text{و}^{3\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{4}\text{ا}^4\text{و}^{4\text{خ}\text{ط}} - \dots\dots$$

$$-\text{ا}\,\text{و}^{-\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{2}\text{ا}^2\text{و}^{-2\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{3}\text{ا}^3\text{و}^{-3\text{خ}\text{ط}} - \frac{1}{4}\text{ا}^4\text{و}^{-4\text{خ}\text{ط}} - \dots\dots$$

$$= -\text{ا}\left[\text{و}^{\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-\text{خ}\text{ط}}\right] - \frac{1}{2}\text{ا}^2\left[\text{و}^{2\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-2\text{خ}\text{ط}}\right] - \frac{1}{3}\text{ا}^3\left[\text{و}^{3\text{خ}\text{ط}} + \text{و}^{-3\text{خ}\text{ط}}\right] - \dots$$

= − ا × ۲ جم ط − ½ ا² × ۲ جم ۲ ط − ⅓ ا³ × ۲ جم ۳ ط ۔ ......

= − ۲ [ا جم ط + ½ ا² جم ۲ ط + ⅓ ا³ جم ۳ ط + ...]

دفعہ ۹۰ کی رو سے لوک (۱ ـ ا و^{خ ط}) کی مندرجہ بالا تفصیل بالعموم اُس صورت میں درست اور جائز ہوگی اگر ـ ا و^{خ ط} کا مقیاس ایک سے کم ہو اور چونکہ ـ ا و^{خ ط} = ا {جم (π + ط) + خ جب (π + ط)}

اس لئے اس کا مقیاس ا ہے ۔

اسلئے بالعموم مندرجہ بالا تفصیل اس صورت میں درست ہوگی جب ا، ا سے کم ہو۔

اگر ا ایک کے مساوی ہو تو بھی مندرجہ بالا تفصیل درست رہے گی بشرطیکہ ط، π کے کسی جفت ضعف کے مساوی نہ ہو

نیز اگر ا، ـ ۱ کے برابر ہو اور ط، π کے کسی طاق ضعف کے مساوی نہ ہو تو بھی تفصیل بالا درست رہیگی ۔

۱۱۱ ـ مشق ۔

$$\frac{۱ - ا^۲}{۱ - ۲ ا \text{ جم ط} + ا^۲}$$

کو ا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

ظاہر ہے کہ

$$\frac{۱ - ا^۲}{۱ - ۲ ا \text{ جم ط} + ا^۲} = -۱ + \frac{۲ - ۲ ا \text{ جم ط}}{۱ - ۲ ا \text{ جم ط} + ا^۲}$$

$$= -۱ + \frac{۲ - ا (و^{خ ط} + و^{-خ ط})}{۱ - ا (و^{خ ط} + و^{-خ ط}) + ا^۲}$$

$$= -1 + \frac{2 - \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right)}{\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)}$$

$$= -1 + \frac{1}{1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}} + \frac{1}{1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}$$

$$= -1 + \left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)^{-1} + \left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)^{-1}$$

$$= -1 + 1 + \text{ا و}^{\text{خ ط}} + \text{ا}^2\,\text{و}^{2\text{خ ط}} + \text{ا}^3\,\text{و}^{3\text{خ ط}} + \ldots\ldots$$
$$+ 1 + \text{ا و}^{-\text{خ ط}} + \text{ا}^2\,\text{و}^{-2\text{خ ط}} + \text{ا}^3\,\text{و}^{-3\text{خ ط}} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right) + \text{ا}^2\left(\text{و}^{2\text{خ ط}} + \text{و}^{-2\text{خ ط}}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 2\,\text{ا جم ط} + 2\,\text{ا}^2\,\text{جم}\,2\text{ط} + 2\,\text{ا}^3\,\text{جم}\,3\text{ط} + \ldots\ \ldots\ \text{تالامتناہی}$$

$\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)^{-1}$ اور $\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)^{-1}$ کی تفصیلیں مسئلہ ثنائی کی مدد سے اُسی صورت میں درست ہونگی جبکہ "ا وخط" کا مقیاس ایک سے کم ہو یعنی جب ا تعداداً ایک سے کم ہو لیکن اس کے سوائے اور کسی صورت میں درست نہ ہونگی (دفعہ ۲۶)

یاد رہے کہ سلسلہ بالا وہی ہے جو دفعہ ۴۹ میں بلاثبوت تسلیم کرلیا گیا تھا۔ اسی طرح سے ہم دفعہ ۴۸ کا سلسلہ بھی معلوم کرسکتے ہیں کیونکہ

$$\frac{2\,\text{ا جب ط}}{1 - 2\,\text{ا جم ط} + \text{ا}^2} = \frac{1}{\text{خ}}\cdot\frac{\text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} - \text{و}^{-\text{خ ط}}\right)}{1 - \text{ا}\left(\text{و}^{\text{خ ط}} + \text{و}^{-\text{خ ط}}\right) + \text{ا}^2}$$

$$= \frac{1}{\text{خ}} \times \frac{\text{ا و}^{\text{خ ط}} - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}{\left(1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}\right)\left(1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}\right)} = \frac{1}{\text{خ}}\left[\frac{1}{1 - \text{ا و}^{\text{خ ط}}} - \frac{1}{1 - \text{ا و}^{-\text{خ ط}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\text{خ}}\left\{\left(1 + \text{ا و}^{\text{خ ط}} + \text{ا}^2\,\text{و}^{2\text{خ ط}} + \ldots\ldots\right) - \left(1 + \text{ا و}^{-\text{خ ط}} + \text{ا}^2\,\text{و}^{-2\text{خ ط}} + \ldots\right)\right\}$$

$$= ۲\,\text{ا جب ط} + ۲\,\text{ا}^{۲}\,\text{جب ۲ ط} + ۲\,\text{ا}^{۳}\,\text{جب ۳ ط} + \ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

حسب سابق یہ تفصیل بھی اسی صورت میں جائز ہوگی جب ا < ۱

۱۱۲ - مشق - اگر جب لا = ن جب (ع + لا) تو لا کو ن کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ جہاں ن ایک سے کم ہے۔

چونکہ جب لا = ن جب (ع + لا) = ن {جب ع جم لا + جم ع جب لا}

$$\therefore\ \text{مس لا} = \frac{\text{ن جب ع}}{۱ - \text{ن جم ع}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}} = \frac{\text{ن خ جب ع}}{۱ - \text{ن جم ع}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{و}^{\text{خ لا}}}{\text{و}^{-\text{خ لا}}} = \frac{۱ - \text{ن جم ع} + \text{ن خ جب ع}}{۱ - \text{ن جم ع} - \text{ن خ جب ع}} = \frac{۱ - \text{ن و}^{-\text{خ ع}}}{۱ - \text{ن و}^{\text{خ ع}}}$$

$$\therefore\ ۲\,\text{خ لا} = \text{لوک}\,(۱ - \text{ن و}^{-\text{خ ع}}) - \text{لوک}\,(۱ - \text{ن و}^{\text{خ ع}})$$

$$= -\text{ن و}^{-\text{خ ع}} - \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\,\text{و}^{-۲\text{خ ع}} - \tfrac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\,\text{و}^{-۳\text{خ ع}} - \ldots\ldots$$

$$+ \text{ن و}^{\text{خ ع}} + \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\,\text{و}^{۲\text{خ ع}} + \tfrac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\,\text{و}^{۳\text{خ ع}} + \ldots\ldots$$

$$= \text{ن}\,(\text{و}^{\text{خ ع}} - \text{و}^{-\text{خ ع}}) + \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\,(\text{و}^{۲\text{خ ع}} - \text{و}^{-۲\text{خ ع}})$$

$$+ \tfrac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\,(\text{و}^{۳\text{خ ع}} - \text{و}^{-۳\text{خ ع}}) \ldots\ldots\ldots \text{ تا لاتناہی}$$

$$= \text{ن} \times ۲\,\text{خ جب ع} + \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲} \times ۲\,\text{خ جب ۲ ع} + \tfrac{۱}{۳}\text{ن}^{۳} \times ۲\,\text{خ جب ۳ ع} + \ldots$$

$$\therefore\ \text{لا} = \text{ن جب ع} + \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\,\text{جب ۲ ع} + \tfrac{۱}{۳}\text{ن}^{۳}\,\text{جب ۳ ع} + \ldots\ldots \quad (۱)$$

اس مساوات میں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ لا، $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے

درمیان واقع ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو ہم کو چاہیئے کہ ۲ خ لا کی بجائے ۲ک خ π + ۲ خ لا لکھیں، تب مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن لا + ک π ہو جائیگا۔ بعد ازیں ہم ک، کے لئے ایسی قیمت تجویز کرسکتے ہیں جس سے لا + ک π، $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔

حسب سابق یہ تفصیلات اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ ن، ایک سے کم ہو۔

۱۱۴ ۔ مشق۔ $\text{و}^{\text{لا}}$ جم ب لا کو لا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

ظاہر ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جم ب لا} = \text{و}^{\text{لا}}\ \frac{\text{و}^{\text{ب خ لا}} + \text{و}^{-\text{ب خ لا}}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\text{و}^{(۱+\text{خ ب})\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\text{و}^{(۱-\text{خ ب})\text{لا}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[۱ + (۱+\text{خ ب})\text{لا} + \frac{(۱+\text{خ ب})^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲!} + \frac{(۱+\text{خ ب})^{۳}\text{لا}^{۳}}{۳!} + \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{۱}{۲}\left[۱ + (۱-\text{خ ب})\text{لا} + \frac{(۱-\text{خ ب})^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲!} + \frac{(۱-\text{خ ب})^{۳}\text{لا}^{۳}}{۳!} + \cdots\cdots\right]$$

اس میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $= \frac{(۱+\text{خ ب})^{\text{ن}} + (۱-\text{خ ب})^{\text{ن}}}{۲\ \text{ن}!}$

اگر $۱ + \text{خ ب} = \text{ر}\ (\text{جم عہ} + \text{خ جب عہ})$

یعنی $\text{ر} = +\sqrt{۱^{۲} + \text{ب}^{۲}}$ اور $\text{مس عہ} = \frac{\text{ب}}{۱}$ (زیر شرائط دفعہ ۲۰)

تب لا^ن کا سر $= \dfrac{\{\text{ر (جم عہ + خو جب عہ)}\}^{ن} + \{\text{ر (جم عہ − خو جب عہ)}\}^{ن}}{2\,\underline{|ن}}$

مسئلہ ڈی مائیور کی رو سے $= \text{ر}^{ن} \dfrac{\text{جم ن عہ}}{\underline{|ن}}$

لہذا

$\text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جم ب لا} = 1 + \text{ر جم عہ} \times \text{لا} + \dfrac{\text{ر}^{2}\ \text{جم 2 عہ}}{\underline{|2}}\ \text{لا}^{2} + \dfrac{\text{ر}^{3}\ \text{جم 3 عہ}}{\underline{|3}}\ \text{لا}^{3}$

$+ \dfrac{\text{ر}^{4}\ \text{جم 4 لا}}{\underline{|4}}\ \text{لا}^{4} + \dots\dots\dots$

جہاں $\text{ر} = +\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}$ اور $\text{مس عہ} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ا}}$

یہ تفصیل ا، ب، اور لا کی تمام قیمتوں کے واسطے درست ہے ... (دفعہ ۵۷)

امثلہ ۱۹

رقوم ذیل کو لا متناہی سلسلوں میں پھیلاؤ

(۱) $\dfrac{1 + \text{ا جم ط}}{1 + 2\,\text{ا جم ط} + \text{ا}^{2}}$ (۲) $\dfrac{\text{جم ط} - \text{ا جم (ط − ف)}}{1 - 2\,\text{ا جم ف} + \text{ا}^{2}}$

(۳) $\dfrac{\text{جب ط} - \text{ا جب (ط − ف)}}{1 - 2\,\text{ا جم ف} + \text{ا}^{2}}$ (۴) $\text{و}^{\text{ا جم ف}}\ \text{جم (ط + ا جب ف)}$

(۵) $\text{و}^{\text{ا ط}}\ \text{جب ب ط}$

ثابت کرو کہ

(۶) $\text{لوک}\ \dfrac{\text{ا}^{2}}{\text{ا}^{2}\ \text{جم}^{2}\ \text{ط} + \text{ب}^{2}\ \text{جب}^{2}\ \text{ط}} = 4\Big[\text{ج جب}^{2}\text{ط} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج}^{2}\ \text{جب}^{2}\ 2\text{ط} + \tfrac{1}{3}\,\text{ج}^{3}\ \text{جب}^{2}\ 3\text{ط} - \dots\dots\Big]$ ... جہاں $\text{ج} = \dfrac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$

(۷) مس$^{-۱}$ $\frac{\text{۱ جب ط}}{\text{۱ − ۱ جم ط}}$ = ۱ جب ط + ۱/۲ لا^{۲} جب ۲ ط + ۱/۳ لا^{۳} جب ۳ ط + ... تالامتناہی

(۸) ۱/۲ مس$^{-۱}$ (جب ۲ عہ مس ۲ بہ) = جب عہ مس بہ + ۱/۳ جب ۳ عہ مس^{۳} بہ + ۱/۵ جب ۵ عہ مس^{۵} بہ
+ .... تالامتناہی

(۹) اگر جب ط = لا جم (ط + عہ)، تو ط کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۱۰) اگر ۲ مس ما = جب لا قم $\frac{\text{لا + عہ}}{۲}$ قم $\frac{\text{لا − عہ}}{۲}$ تو
ما کو (جم عہ) کی رقوم میں پھیلاؤ

(۱۱) اگر مس لا = ن مس ما اور $\frac{\text{۱ − ن}}{\text{۱ + ن}}$ = م، تو ثابت کرو کہ

لا + ر ۳ = ما − م جب ۲ ما + م^{۲}/۲ جب ۴ ما − م^{۳}/۳ جب ۶ ما + ... تالامتناہی
جہاں ر کے لئے ایسی قیمت تجویز کرنی چاہیئے جس سے لا + ر ۳ − ما کی قیمت
− ۳/۲ اور + ۳/۲ کے درمیان واقع ہو۔

(۱۲) اگر (۱) ن = جم عہ اور
(۲) ن = $\frac{۱}{\text{جم ۲ عہ}}$
تو دونوں صورتوں میں مشق ماقبل کا سلسلہ کونسی شکل اختیار کرتا ہے۔

(۱۳) لوک جم ($\frac{۳}{۴}$ + ط) کو ط کے صعودی اضعاف کی جیوب اور جیوب التمام کے رقوم میں پھیلاؤ۔

(۱۴) لوک مس ($\frac{۳}{۴}$ + $\frac{\text{ط}}{۲}$) کو ط کے صعودی اضعاف کی جیوب کی رقوم میں پھیلاؤ۔

(۱۵) ثابت کرو کہ

$$(۱ + و^{خ ط} مس عہ)(۱ + و^{-خ ط} مس عہ)(۱ + و^{خ ط} مم عہ)(۱ + و^{-خ ط} مم عہ)$$

$$= ۴ (قط^{۲} بہ + جم^{۲} ط)$$

$$جہاں\ بہ = \frac{\pi}{۴} - ۲ عہ$$

اس کی مدد سے لوک (۱ + جم بہ جم ط) کے لئے ایک سلسلہ ط کے اضعاف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ

$$\frac{۲ ا جم ط}{۱ - ۲ ا جب ط + ا^{۲}} = ۲ ا جم ط + ۲ ا^{۲} جب ۲ط - ۲ ا^{۳} جم ۳ط - ۲ ا^{۴} جب ۴ط + \ldots\ تا لاتناہی$$

(۱۷) ثابت کرو کہ

$$لوک جم ط = - لوک ۲ + جم ۲ط - \frac{۱}{۲} جم ۴ط + \frac{۱}{۳} جم ۶ط - \ldots\ تا لاتناہی$$

جہاں ط سے ایسا زاویہ مراد ہے جس کی جیب التمام مثبت ہو

(۱۸) ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں $ا > ب$، تو

$$لوک ج = لوک ا - \frac{ب}{ا} جم ج - \frac{۱}{۲} \frac{ب^{۲}}{ا^{۲}} جم ۲ج - \frac{۱}{۳} \frac{ب^{۳}}{ا^{۳}} جم ۳ج - \ldots\ تا لاتناہی$$

[ہمیں معلوم ہے کہ $ج^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} - ۲ اب جم ج = ا^{۲}(۱ - \frac{ب}{ا} و^{خ ج})(۱ - \frac{ب}{ا} و^{-خ ج})$]

(۱۹) اگر $و^{ا لا} جب ب لا + و^{ب لا} جب ا لا$ کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کیجائے تو ثابت کرو کہ

$$لا^{ن} کا سر = \frac{۲(ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{ن}{۲}}}{\underline{ن}} جب \frac{ن\pi}{۴} جم \frac{ن}{۲} \left[\frac{\pi}{۲} - ۲ مس^{-۱} \frac{ب}{ا}\right]$$

(۲۰) ثابت کرو کہ لوک $(ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ۳ ا ب ج)$ کی تفصیل میں

$$ج^{ن} کا سر = \frac{۱}{ن}\left[\frac{(-۱)^{ن-۱}}{(ا + ب)^{ن}} - \frac{۲ جم ن ط}{(ا^{۲} + ب^{۲} - ا ب)^{\frac{ن}{۲}}}\right]$$

$$جہاں\ مس ط = \frac{ا - ب}{ا + ب} \sqrt{۳}$$

باب نہم

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا اور حب طہ اور جم طہ کے لئے لا متناہی حاصل ضرب

۱۱۴ - ہم الجبرا میں یہ معلوم کر چکے ہیں کہ اگر ف سے لا کا کوئی تفاعل مراد ہو اور اگر یہ جملہ لا کی بجائے عہ رکھنے سے صفر ہو جائے تو لا - عہ، ف کا ایک جزو ضربی ہوتا ہے ۔

لہذا ثابت ہوا کہ کسی جملہ ف کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لئے پہلے ہمیں مساوات ف = ۰ کو حل کرنا چاہیئے ۔

نیز ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف = ۰ ن ویں درجہ کی مساوات ہو تو اس مساوات کے ن حل ہونگے - اور اگر یہ قیمتیں جو مساوات مذکورہ کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں، عہ، بہ، جہ .... لہ ہوں تو جملہ ف کے اجزائے ضربی لا - عہ، لا - بہ، لا - جہ، ... لا - لہ ہونگے اور ان کے علاوہ اور کوئی جزو ضربی ایسا نہ ہوگا جس میں لا شامل ہو

دفعات مابعد میں اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لئے ہم یہی طریقہ اختیار کرینگے ۔

۱۱۵ - جملہ لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} جم ن طہ + ۱
کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

ہیں پہلے مساوات

لا^۲ن - ۲ لا^ن جم ن طہ + ۱ = ۰

کو حل کرنا چاہیئے

مساوات بالا اس طرح لکھی جاسکتی ہے لا^۲ن - ۲ لا^ن جم ن طہ + جم^۲ ن طہ = - جب^۲ ن طہ

یعنی لا^ن - جم ن طہ = ± √-۱ جب ن طہ

اور اس لئے لا = [جم ن طہ ± √-۱ جب ن طہ]^(۱/ن)

دفعہ ۲۴ کی رو سے اس جملہ کی قیمتیں ذیل کی ۲ ن مقادیر ہیں۔

جم طہ ± خ جب طہ، جم (طہ + ۲π/ن) ± خ جب (طہ + ۲π/ن)،

جم (طہ + ۴π/ن) ± خ جب (طہ + ۴π/ن)......

......جم {طہ + ۲(ن - ۱)π/ن} ± خ جب {طہ + ۲(ن - ۱)π/ن}

پہلے زوج سے ذیل کے دو اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں۔

لا - جم طہ + خ جب طہ اور لا - جم طہ - خ جب طہ

یا اگر ان دونوں کو ضرب دیکر ایک جزو ضربی بنا لیا جائے تو گویا اول زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

(لا - جم طہ)^۲ + جب^۲ طہ

یعنی لا^۲ - ۲ لا جم طہ + ۱ حاصل ہوتا ہے

اسی طرح سے متذکرہ بالا مقادیر کے دوسرے، تیسرے،...... ازواج سے بالترتیب ذیل کے اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں۔

لا^۲ - ۲ لا جم (طہ + ۲π/ن) + ۱

لا^۲ - ۲ لا جم (ط + ۲/ن ۴π) + ۱

. . . .

اور لا^۲ - ۲ لا جم (ط + (۲ن - ۲)/ن π) + ۱

نیز ان اجزائے ضربی کو ضرب دینے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ لا^{۲ن} کا سر ایک ہے اور اصلی جملہ میں بھی ۲ ن کا سر ایک ہی ہے۔ لہذا جملہ مذکور کو ان اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی کرنے میں مؤخر الذکر کے ساتھ کسی عددی جزو ضربی کے ثبت کرنے کی ضرورت نہیں۔

پس

لا^{۲ن} - ۲ لا^ن جم ن ط + ۱

= (لا^۲ - ۲ لا جم ط + ۱) {لا^۲ - ۲ لا جم (ط + ۲/ن π) + ۱} {لا^۲ - ۲ لا جم (ط + ۴/ن π)

+ ۱} .... {لا^۲ - ۲ لا جم (ط + (۲ن - ۲)/ن π) + ۱} .... (۱)

لا^ن پر تقسیم کرنے سے

لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن ط = {لا + ۱/لا - ۲ جم ط} {لا + ۱/لا - ۲ جم (ط + ۲/ن π)} ....

.... {لا + ۱/لا - ۲ جم (ط + (۲ن - ۲)/ن π)} .... (۲)

ربط (۲) کو بطریقۂ ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

لا^ن + ۱/لا^ن - ۲ جم ن ط = Π_{ر=۰}^{ر=ن-۱} {لا + ۱/لا - ۲ جم (ط + ۲ر/ن π)}

جہاں علامت Π_{ر=۰}^{ن-۱} سے مراد ان سب جملوں کا حاصل ضرب ہے جو اس کے بائیں

جانب کے جملہ میں ر کو بالتسلسل صفر سے لیکر ن – ۱، تک کے کل صحیح اعداد کے برابر رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن} جم ن طہ + ا^{۲ن}$$

$$= \{لا^{۲} - ۲ ا لا جم طہ + ا^{۲}\}\{لا^{۲} - ۲ ا لا جم (طہ + \frac{۲\pi}{ن}) + ا^{۲}\}$$

$$\{لا^{۲} - ۲ ا لا جم (طہ + \frac{۴\pi}{ن}) + ا^{۲}\} ......$$

$$...... \{لا^{۲} - ۲ ا لا جم (طہ + \frac{۲ن - ۲}{ن} \pi) + ا^{۲}\} .... (۳)$$

۱۱۶ – دفعہ ماقبل کا مسئلہ استقرار سے بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ

$$لا^{ن} + \frac{1}{لا^{ن}} - ۲ جم ن عہ،$$

$لا + \frac{1}{لا} - ۲ جم عہ$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

اگر $لا^{ن} + \frac{1}{لا^{ن}} - ۲ جم ن عہ$ کو فہ (ن) سے تعبیر کیا جائے

اور $لا + \frac{1}{لا} - ۲ جم عہ$ کو لہ سے، تو گویا ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ فہ (ن)، لہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

مان لو کہ یہ مسئلہ فہ (ن – ۱) اور فہ (ن – ۲) کے لئے درست ہے۔

یعنی فہ (ن – ۱) اور فہ (ن – ۲) دونوں لہ پر پورے تقسیم ہو جاتے ہیں۔

$$(لا + \frac{1}{لا}) فہ (ن - ۱) = (لا + \frac{1}{لا})\{لا^{ن-۱} + \frac{1}{لا^{ن-۱}} - ۲ جم (ن - ۱) عہ\}$$

$$= (لا^{ن} + \frac{1}{لا^{ن}}) + (لا^{ن-۲} + \frac{1}{لا^{ن-۲}}) - ۲ جم (ن - ۱) عہ \times (لا + \frac{1}{لا})$$

$$= \{لا^{ن} + \frac{1}{لا^{ن}} - ۲ جم ن عہ\}$$

$$+ \{لا^{ن-۲} + \frac{1}{لا^{ن-۲}} - ۲ جم (ن - ۲) عہ\} - ۲ جم (ن - ۱) عہ \{لا + \frac{1}{لا} - ۲ جم عہ\}$$

کیونکہ $۲ جم ن عہ + ۲ جم (ن - ۲) عہ = ۴ جم عہ جم (ن - ۱) عہ$

اس لئے (لا + ۱/لا) × فہ (ن − ۱) = فہ (ن) + فہ (ن − ۲) − ۲ لہ جم (ن − ۱) عہ

∴ فہ (ن) = (لا + ۱/لا) فہ (ن − ۱) − فہ (ن − ۲) + ۲ لہ جم (ن − ۱) عہ ..... (۱)

اس سے ظاہر ہے کہ اگر فہ (ن − ۱) اور فہ (ن − ۲) میں جزو ضربی لہ شامل ہو تو لازماً فہ (ن) میں بھی ایک جزو ضربی لہ واقع ہوگا۔

اب فہ (۱) = لا + ۱/لا − ۲ جم عہ = لہ

اور فہ (۲) = لا² + ۱/لا² − ۲ جم ۲ عہ = (لا + ۱/لا − ۲ جم عہ)(لا + ۱/لا + ۲ جم عہ)

= لہ (لا + ۱/لا + ۲ جم عہ)

یعنی فہ (۱) اور فہ (۲) دونوں لہ پر پورے تقسیم ہو جاتے ہیں۔

اور مساوات (۱) میں ن = ۳ رکھنے سے ظاہر ہے کہ فہ (۳)، لہ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، اسی طرح سے اگر مساوات (۱) میں بالتسلسل ن = ۴، ن = ۵، ن = ۶، .... رکھا جائے تو استقراء سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (ن)، لہ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

∴ لا^ن + ۱/لا^ن − ۲ جم ن عہ، پورا تقسیم ہو جاتا ہے لا + ۱/لا − ۲ جم عہ پر

نیز چونکہ لا^ن + ۱/لا^ن − ۲ جم ن عہ = لا^ن + ۱/لا^ن − ۲ جم ن (عہ + ۲ط/ن)

اور موخر الذکر جملہ، حسب ثبوت سابق لا + ۱/لا − ۲ جم (عہ + ۲ط/ن) پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لئے ثابت ہوا کہ اول الذکر جملہ لا^ن + ۱/لا^ن − ۲ جم ن عہ بھی مقدار لا + ۱/لا − ۲ جم (عہ + ۲ط/ن) پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

اسی قسم کے مزید استدلال سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ جملہ زیر بحث مقادیر لا + ۱/لا − ۲ جم (عہ + ۴ط/ن)،

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم}\left(\text{ع} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)،$$

....

اور
$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - ۲\ \text{جم}\left(\text{ع} + \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن}}\ ۲\pi\right)$$

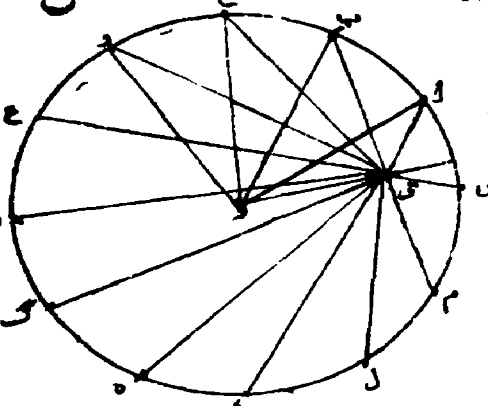
پر بھی پورا تقسیم ہوسکتا ہے۔ اس سے دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۲) آسانی سے حاصل ہوجاتی ہے۔

۱۱۷۔ دائرہ کے متعلق ڈی مائیور کا مسئلہ

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۳) کو ہندسی معنی بھی پہنائے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ر ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ...... بنایا گیا ہے

پس $\angle$ ا و ب = $\angle$ ب و ج = $\angle$ ج و د ... = $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$



فرض کرو کہ دائرہ کے اندر یا باہر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ

و ق = لا اور $\angle$ ق و ا = ط

تب $\angle$ ق و ب = ط + $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$،

$\angle$ ق و ج = ط + $\frac{۲ \times ۲\pi}{\text{ن}}$، ......

اور بنابریں $\text{ق ا}^2 = \text{و ق}^2 + \text{و ا}^2 - ۲\ \text{و ق} \times \text{و ا}\ \text{جم ق و ا}$

$$= \text{لا}^2 - ۲\ \text{ر لا جم ط} + \text{ر}^2$$

$$\text{ق ب}^2 = \text{و ق}^2 + \text{و ب}^2 - ۲\ \text{و ق} \times \text{و ب جم ق و ب}$$

$$= \text{لا}^2 - ۲\ \text{ر لا جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ر}^2$$

$$\text{ق ج}^2 = \text{لا}^2 - ۲\ \text{ر لا جم}\left(\text{ط} + \frac{۲ \times ۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ر}^2$$

....

لہذا ق ا^{2} × ق ب^{2} × ق ج^{2} × .... ن اجزائے ضربی تک

= {لا^{2} - ۲ ر لا جم ط + ر^{2}} {لا^{2} - ۲ ر لا جم (ط + $\frac{2\pi}{ن}$) + ر^{2}}

{لا^{2} - ۲ ر لا جم (ط + $\frac{4\pi}{ن}$) + ر^{2}} .... ن اجزائے ضربی تک

= لا^{2ن} - ۲ ر^{ن} لا^{ن} جم ن ط + ر^{2ن}

۱۱۸ـ دائرہ کے متعلق کوٹی کا مسئلہ

دفعہ ماقبل میں فرض کرو کہ نقطہ ق، دا پر واقع ہے۔
یعنی فرض کرو کہ نقطہ ق، اُن خطوط میں سے جو دائرہ کے مرکز و کو کثیر الاضلاع کے رأسوں کے ساتھ ملاتے ہیں، کسی ایک پر واقع ہے
اس صورت میں ط = ۰ اور

ق ا^{2} × ق ب^{2} × ق ج^{2} .... ن اجزائے ضربی تک

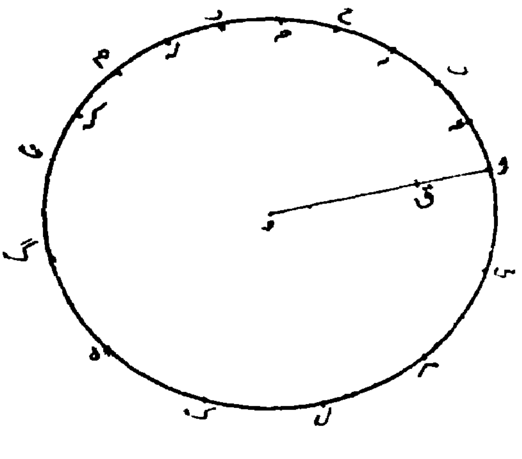
= لا^{2ن} - ۲ ر^{ن} لا^{ن} + ر^{2ن}

= (لا^{ن} - ر^{ن})

∴ ق ا × ق ب × ق ج

.... ن اجزائے ضربی تک

= لا^{ن} - ر^{ن} یا ر^{ن} - لا^{ن}



پہلی قیمت اس صورت میں درست ہوگی جب ق دائرہ کے باہر و ا ممدودہ پر واقع ہو یعنی جب لا > ر، اور دوسری قیمت اس صورت میں درست ہوگی، جبکہ نقطہ ق دائرہ کے اندر دا پر واقع۔

لہذا ثابت کرو کہ

ق ا × ق ب × ق ج × ق د .... ن اجزائے ضربی تک = لا^ن − ر^ن ...... (۱)

نیز فرض کرو کہ قوسوں اب، ب ج، ج د ...... کے نقاط تنصیف بالترتیب ع، ہ، ح، ل .... ہیں، یعنی ا ع ب ہ ج ح ...۲ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے جو دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

ق ا × ق ع × ق ب × ق ہ × ق ج × ق ح ...... ۲ ن اجزائے ضربی تک = لا^{۲ن} − ر^{۲ن} .... (۲)

(۱) کو (۲) پر تقسیم کرنے سے

ق ع × ق ہ × ق ح .. ن اجزائے ضربی تک = لا^ن + ر^ن ...... (۳)

اس دفعہ کی مساوات (۳)، دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۳) میں ط = $\frac{\pi}{ن}$ رکھنے سے براہ راست حاصل ہو سکتی ہے۔ یعنی

(لا^۲ − ۲ رلا جم $\frac{\pi}{ن}$ + ر^۲) (لا^۲ − ۲ رلا جم $\frac{۳\pi}{ن}$ + ر^۲) (لا^۲ − ۲ رلا جم $\frac{۵\pi}{ن}$ + ر^۲) ...

. . .. ن اجزائے ضربی تک = لا^{۲ن} − ۲ ر^ن لا^ن جم π + ر^{۲ن}

= لا^{۲ن} + ۲ ر^ن لا^ن + ر^{۲ن} = (لا^ن + ر^ن)^۲

یعنی ق ع^۲ × ق ہ^۲ × .... ن اجزائے ضربی تک = (لا^ن + ر^ن)^۲

دفعہ ہذا کی مساوات (۳) یہی ہے۔

۱۱۹۔ لا^ن − ۱ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہمیں مساوات لا^ن − ۱ = ۰

کو حل کرنا چاہیئے۔

مساوات مذکورہ سے لا^ن = جم ۲ ر π ± خ جب ۲ ر π جہاں ر سے کوئی صحیح عدد مراد ہے۔

پس لا = [جم ۲ ر π ± خ جب ۲ ر π]$^{\frac{1}{ن}}$ .... (۱)

صورت اول — فرض کرو کہ ن، جفت ہے

بموجب دفعہ ۱۲۴ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

جم ۰ ± خ جب ۰ ، جم $\frac{2\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{2\pi}{ن}$

جم $\frac{4\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{4\pi}{ن}$ ..... جم $\frac{ن-2}{ن}\pi$ ± خ جب $\frac{ن-2}{ن}\pi$ ،

جم $\frac{ن\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{ن\pi}{ن}$ ،

لیکن جم ۰ ± خ جب ۰ = ۱

اور جم $\frac{ن\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{ن\pi}{ن}$ = -۱

لہٰذا اس صورت میں مساوات (۱) کی اصلیں ذیل کی ن مقداریں ہیں

±۱، جم $\frac{2\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{2\pi}{ن}$ ، جم $\frac{4\pi}{ن}$ ± خ جب $\frac{4\pi}{ن}$

.... جم $\frac{ن-2}{ن}\pi$ ± خ جب $\frac{ن-2}{ن}\pi$

پہلے زوج کے متعلق اجزائے ضربی لا - ۱ اور لا + ۱ ہیں جو دونوں ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی لا^2 - ۱ کے مساوی ہیں۔

دوسرے زوج کے متعلقہ اجزائے ضربی لا - جم $\frac{2\pi}{ن}$ - خ جب $\frac{2\pi}{ن}$ اور لا - جم $\frac{2\pi}{ن}$ + خ جب $\frac{2\pi}{ن}$ ہیں، یعنی اس زوج سے متعلق

جزو ضربی درجہ دوم لا^٢ - ٢ لا جم ٢π/ن + ١ ہے -

اس طرح ہمیں درجہ دوم کے اجزائے ضربی کے ن/٢ زوج حاصل ہوتے ہیں -

اگر ان سب کو ضرب دیا جائے تو لا^ن کا سر ایک ہوگا ، اسلئے ہمیں اس حاصل ضرب کے ساتھ کوئی عددی تعداد لگانے کی ضرورت نہیں -

لہذا بالآخر ثابت ہوا کہ اگر ن **جفت** ہو تو

لا^ن - ١ = (لا^٢ - ١)(لا^٢ - ٢ لا جم ٢π/ن + ١)(لا^٢ - ٢ لا جم ٤π/ن + ١)

.........(لا^٢ - ٢ لا جم (ن-٢)/ن π + ١) .... (٢)

صورت دوم - فرض کرو کہ ن **طاق** ہے -

تب حسب دفعہ ٢٤ جملہ (١) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی -

جم ٠ ± خ جب ٠ ، جم ٢π/ن ± خ جب ٢π/ن

جم ٤π/ن ± خ جب ٤π/ن ، ..... جم (ن-٣)/ن π ± خ جب (ن-٣)/ن π

جم (ن-١)/ن π ± خ جب (ن-١)/ن π

پہلے زوج سے صرف ایک ہی قیمت + ١ حاصل ہوتی ہے

حسب سابق باقی زوجوں کو لینے سے جب ن طاق ہو تو

لا^ن - ١ = (لا - ١){لا^٢ - ٢ لا جم ٢π/ن + ١}{لا^٢ - ٢ لا جم ٤π/ن + ١}

........{لا^٢ - ٢ لا جم (ن-١)/ن π + ١} ....(٣)

اختصاراً اگر ن جفت ہو تو

$$لا^{ن} - ۱ = (لا^{۲} - ۱) \prod_{ر=۱}^{\frac{ن}{۲} - ۱} (لا^{۲} - ۲ لا جم \frac{۲ر\pi}{ن} + ۱)$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$لا^{ن} - ۱ = (لا - ۱) \prod_{ر=۱}^{ر = \frac{ن-۱}{۲}} (لا^{۲} - ۲ لا جم \frac{۲ر\pi}{ن} + ۱)$$

یہ ضوابط دفعہ ۱۱۵ کے اساسی ضابطہ میں ن ط کی بجائے ۲π لکھنے سے بھی بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۰۔ $لا^{ن} + ۱$ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہمیں مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کو حل کرنا چاہیے۔

$$لا^{ن} = -۱ = جم(۲ر\pi + \pi) \pm خ جب (۲ر\pi + \pi)$$

جہاں ر کوئی صحیح عدد ہے۔

$$یعنی\ لا = \{جم(۲ر\pi + \pi) \pm خ جب (۲ر\pi + \pi)\}^{\frac{۱}{ن}}$$

$$= جم \frac{۲ر\pi + \pi}{ن} \pm خ جب \frac{۲ر\pi + \pi}{ن} \ldots\ldots (۱)$$

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے

بموجب دفعہ ۲۴ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :-

$$جم \frac{\pi}{ن} \pm خ جب \frac{\pi}{ن} ،\quad جم \frac{۳\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۳\pi}{ن}$$

$$جم \frac{۵\pi}{ن} \pm خ جب \frac{۵\pi}{ن} \ldots\ldots جم \frac{(ن-۱)\pi}{ن} \pm خ جب \frac{(ن-۱)\pi}{ن}$$

ان ازواج میں سے پہلے زوج کے متعلق اجزائے ضربی

$$لا - جم \frac{\pi}{ن} - خ جب \frac{\pi}{ن}$$

$$لا - جم \frac{۲\pi}{ن} + خ\ جب \frac{۲\pi}{ن}$$

دونوں ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی

$$لا^{۲} - ۲\ لا\ جم \frac{۲\pi}{ن} + ۱$$ کے مساوی ہیں۔

اسی طرح دوسرے زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$لا^{۲} - ۲\ لا\ جم \frac{۳ \cdot ۲\pi}{ن} + ۱$$

علیٰ ہٰذا القیاس، لہٰذا حسب دفعہ ماقبل جب ن جفت ہو تو

$$\ldots + ۱ = (لا^{۲} - ۲\ لا\ جم \frac{۲\pi}{ن} + ۱)(لا^{۲} - ۲\ لا\ جم \frac{۳ \cdot ۲\pi}{ن} + ۱)$$

$$\ldots\ldots \left[لا^{۲} - ۲\ لا\ جم \frac{(ن - ۱)\,۲\pi}{ن} + ۱\right]$$

صورت دوم - فرض کرو کہ ن طاق ہے۔

اس صورت میں جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی۔

$$\ldots \pm خ\ جب \frac{۲\pi}{ن} \ ،\ جم \frac{۳ \cdot ۲\pi}{ن} \pm خ\ جب \frac{۳ \cdot ۲\pi}{ن} \ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{(ن-۲)\,۲\pi}{ن} \pm خ\ جب \frac{(ن - ۲)\,۲\pi}{ن} \ ،\ جم \frac{ن\,۲\pi}{ن} \pm خ\ جب \frac{ن\,۲\pi}{ن}$$

... زوج سے صرف ایک قیمت -۱ حاصل ہوتی ہے پس

... اجزائے ضربی میں سے لا + ۱ ایک جزو ضربی

... مندرجہ بالا قیمتوں کے مسلسل ازواج کے متعلق درجہ دوم کے

... ضربی حسب ذیل ہیں۔

$$\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}} + 1 \qquad \text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{3\pi}{\text{ن}} + 1 \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(\text{ن}-2)\pi}{\text{ن}} + 1$$

لہذا بالآخر جب ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = (\text{لا} + 1)\left(\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}} + 1\right)\left(\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{3\pi}{\text{ن}} + 1\right)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left[\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}-2}{\text{ن}}\,\pi + 1\right]$$

اختصاراً اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = \prod_{\text{ر}=0}^{\frac{\text{ن}-2}{2}} \left(\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\,\pi + 1\right)$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = (\text{لا} + 1) \prod_{\text{ر}=0}^{\frac{\text{ن}-3}{2}} \left(\text{لا}^{2} - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\,\pi + 1\right)$$

یہ ضوابط دفعہ ۱۱۵ کے اساسی ضابطہ میں ن طہ کی بجائے π لکھنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۱۔ مشق ۱۔ مقادیر جم ن فہ - جم ن طہ اور جم ن فہ - جم ن طہ کو ن اجزاے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۲) میں لا = و^خ فہ رکھو

پس $\text{لا}^{-1} = \text{و}^{-\text{خ فہ}}$ اسلئے

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{و}^{\text{خ فہ}} + \text{و}^{-\text{خ فہ}} = 2\,\text{جم فہ}$$

اور $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \text{و}^{\text{ن خ فہ}} + \text{و}^{-\text{ن خ فہ}} = ۲\,\text{جم ن فہ}$

تب $۲\,\text{جم ن فہ} - ۲\,\text{جم ن طہ} = (۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم طہ})\left[۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right]$

$\left[۲\,\text{جم فہ} - ۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)\right] \ldots\ldots$ ن اجزائے ضربی تک

یعنی $\text{جم ن فہ} - \text{جم ن طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\left\{\text{جم فہ} - \text{جم طہ}\right\}\left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$

$\ldots\ldots\ldots \left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ن}-۲}{\text{ن}}\pi\right)\right\}$

$= ۲^{\text{ن}-۱} \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \left\{\text{جم فہ} - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$

اسی طرح سے لا = وفہ رکھنے سے

$\text{جز ن فہ} - \text{جز ن طہ} = ۲^{\text{ن}-۱}\left[\text{جز فہ} - \text{جز طہ}\right]\left[\text{جز فہ} - \text{جز}\left(\text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right] \ldots\ldots$

$\ldots\left[\text{جز فہ} - \text{جز}\left(\text{طہ} + \frac{۲\text{ن}-۲}{\text{ن}}\pi\right)\right]$

مشق ۲ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\frac{۲\pi}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۴\pi}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۶\pi}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

دفعہ ۱۱۹ کی مساوات (۲) میں ن کو ایک کے برابر فرض کرو۔

اب چونکہ $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}{\text{لا}^۲-۱} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots + \text{لا} + ۱}{\text{لا} + ۱}$

اس لئے اگر لا ایک کے مساوی ہو تو $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}{\text{لا}^۲-۱} = \frac{\text{ن}}{۲}$

لہذا $\frac{\text{ن}}{۲} = \left(۲-۲\,\text{جم}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\left(۲-۲\,\text{جم}\frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)\left(۲-۲\,\text{جم}\frac{۶\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\left(۲-۲\,\text{جم}\frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}}\pi\right)$

یعنی $ن = ۲ \times ۴ \text{ جب}^۲ \frac{\pi ۲}{۲ن} \times ۴ \text{ جب}^۲ \frac{\pi ۴}{۲ن} \ldots\ldots ۴ \text{ جب}^۲ \frac{ن-۲}{۲ن} \pi$

جہاں اجزائے ضربی کی تعداد $\frac{ن}{۲} - ۱$ ہے۔

$= ۲^{ن-۱} \times \text{ جب}^۲ \frac{\pi ۲}{۲ن} \text{ جب}^۲ \frac{\pi ۳}{۲ن} \ldots\ldots \text{ جب}^۲ \frac{ن-۲}{۲ن} \pi$ اسلئے

$\pm \sqrt{ن} = ۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جب } \frac{\pi ۲}{۲ن} \text{ جب } \frac{\pi ۳}{۲ن} \ldots\ldots \text{ جب } \frac{\pi(ن-۲)}{۲ن} \ldots\ldots (۱)$

اب زوایا $\frac{\pi ۲}{۲ن}$، $\frac{\pi ۴}{۲ن}$، ... $\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}$، میں سے ہرایک زاویہ، قائمہ سے کم ہے

اس لئے مساوات (۱) کی بائیں جانب کی سب جیوب مثبت ہیں۔
بنابریں دائیں جانب کے رکن کی مشتبہ علامت کی بجائے مثبت کی علامت لکھنی چاہیئے
جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ ۲۰

ذیل کی مقادیر کے اجزائے ضربی معلوم کرو۔

۱۔ $لا^۶ + ۲ لا^۳ \text{ جم } ۲۰° + ۱$ ۲۔ $لا^۸ - ۲ لا^۴ \text{ جم } ۶۰° + ۱$ ۳۔ $لا^{۱۰} - ۲ لا^۵ \text{ جم } \frac{\pi}{۳} + ۱$

۴۔ $لا^۷ + لا^۶ + ۱$ ۵۔ $لا^{۱۲} + لا^۷ + ۱$ ۶۔ $لا^۵ - ۱$

۷۔ $لا^۶ + ۱$ ۸۔ $لا^۷ - ۱$ ۹۔ $لا^۹ + ۱$

۱۰۔ $لا^{۱۰} - ۱$ ۱۱۔ $لا^{۱۳} + ۱$ ۱۲۔ $لا^{۱۳} - ۱$ ۱۳۔ $لا^{۲۰} + ۱$

۱۴۔ اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$\frac{ن-۱}{۲} \text{ جب } \frac{\pi}{۲ن} \text{ جب } \frac{\pi ۳}{۲ن} \text{ جب } \frac{\pi ۵}{۲ن} \ldots\ldots \text{ جب } \frac{ن-۱}{۲ن}\pi = ۱$

$= ۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جم } \frac{\pi}{۲ن} \text{ جم } \frac{\pi ۳}{۲ن} \text{ جم } \frac{\pi ۵}{۲ن} \ldots\ldots \text{ جم } \frac{ن-۱}{۲ن}\pi$

۱۵- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جب } \frac{۲\pi}{۲ن} \text{ جب } \frac{۴\pi}{۲ن} \text{ جب } \frac{۶\pi}{۲ن} \cdots \text{ جب } \frac{ن-۱}{۲ن}\pi$$

$$= \sqrt{ن} = ۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جم } \frac{\pi}{۲ن} \text{ جم } \frac{۳\pi}{۲ن} \cdots\cdots \text{ جم } \frac{ن-۲}{ن}\pi$$

اور

$$۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جب } \frac{\pi}{۲ن} \text{ جب } \frac{۳\pi}{۲ن} \cdots\cdots \text{ جب } \frac{ن-۲}{۲ن}\pi$$

$$= ۱ = ۲^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{ جم } \frac{۲\pi}{۲ن} \text{ جم } \frac{۴\pi}{۲ن} \cdots\cdots \text{ جم } \frac{ن-۱}{۲ن}\pi$$

۱۶- ثابت کرو کہ $\text{جب } \frac{\pi}{ن} \text{ جب } \frac{۲\pi}{ن} \cdots\cdots \text{ جب } \frac{ن-۱}{ن}\pi = \frac{ن}{۲^{ن-۱}}$

۱۷- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{\pi}{ن} \text{ مس } \frac{۲\pi}{ن} \text{ مس } \frac{۳\pi}{ن} \cdots \text{ مس } \frac{\frac{۱}{۲}(ن-۱)\pi}{ن} = \sqrt{ن}$$

۱۸- ثابت کرو کہ $\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\left(\text{جم ط} - \text{جم } \frac{\pi}{۲ن}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم } \frac{۳\pi}{۲ن}\right) \cdots \left(\text{جم ط} - \text{جم } \frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi\right)$

ثابت کرو کہ

$$\text{جب ن فہ} = ۲^{ن-۱} \text{ جب فہ جب}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{ن}\right) \cdots\cdots \text{ جب}\left(\text{فہ} + \frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$$

$$= ۲^{ن-۱} \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{ر\pi}{ن}\right)$$

[دفعہ ۱۱۵ کی مساوات میں لا = ۱ اور ط = ۲ فہ رکھو]

۲۰- $\text{جم ن فہ} = ۲^{ن-۱} \text{ جب}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{۲ن}\right) \text{ جب}\left(\text{فہ} + \frac{۳\pi}{۲ن}\right) \cdots \text{ جب}\left(\text{فہ} + \frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi\right)$

[مشق ماقبل کے ضابطہ میں فہ کو فہ + $\frac{\pi}{۲ن}$ میں بدل دو]

۲۱- $۲^{ن-۱} \text{ جم فہ جم}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{ن}\right) \text{ جم}\left(\text{فہ} + \frac{۲\pi}{ن}\right) \cdots\cdots \text{ جم}\left(\text{فہ} + \frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$

$= (-۱)^{\frac{ن}{۲}}$ جب ن فہ　　　اگر ن جفت ہو

اور $= (-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جم ن فہ　　　اگر ن طاق ہو

[مشق ۱۹ میں فہ کو فہ + $\frac{\pi}{۲}$ میں بدل دو]

۲۲— $۲^{ن-۱}$ جم $\frac{\pi}{۲ن}$ جم $\frac{۳\pi}{۲ن}$ جم $\frac{۵\pi}{۲ن}$ ․ ․ ․ جم $\frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi$ = جم $\frac{ن\pi}{۲}$

۲۳— $۲^{ن-۱}$ جب $\frac{\pi}{۲ن}$ جب $\frac{۳\pi}{۲ن}$ جب $\frac{۵\pi}{۲ن}$ ․ ․ ․ جب $\frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi = ۱$

۲۴— جم $\frac{\pi}{ن}$ جم $\frac{۲\pi}{ن}$ ․ ․ ․ ․ جم $\frac{(ن-۱)\pi}{ن} = \frac{۱-(-۱)^{ن}}{۲^{ن-۱}}$

۲۵— ثابت کرو کہ

$$\frac{لا^{ن} - ا^{ن}\ جم\ ن\ طہ}{لا^{۲ن} - ۲ا^{ن}\ لا^{ن}\ جم\ ن\ طہ + ا^{۲ن}} = \frac{۱}{ن\ لا^{ن-۱}} \sum_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \frac{لا - ا\ جم\left(طہ + \frac{۲ر\pi}{ن}\right)}{لا^{۲} - ۲ا\ لا\ جم\left(طہ + \frac{۲ر\pi}{ن}\right) + ا^{۲}}$$

[دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۳) میں لا کو لا + ھ میں بدل دو اور پھیلانے کے بعد ھ کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھو یا لوگارثم لیکر بلحاظ طہ کے تفرق کرو]

۲۶— ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہے۔ دائرہ کے محیط کو نقاط ق، $ق_{۱}$، $ق_{۲}$ ․ $ق_{۲ن}$ پر ۲ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر ق کو باقی سب نقاط $ق_{۱}$، $ق_{۲}$ ․․ $ق_{ن}$ سے ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ق\,ق_{۱} \times ق\,ق_{۲} \cdots ق\,ق_{ن} = ر^{ن-۱}\sqrt{ن}$$

نیز اگر وتر $ق\,ق_{ن}$ کا نقطہ تنصیف و ہو تو ثابت کرو کہ

$$و\,ق_{۱} \times و\,ق_{۲} \cdots\cdots و\,ق_{ن} = \sqrt{۲}\ ر^{ن}$$

۲۷— ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہے اور مرکز م۔ اس کے اندر (۲ن + ۱) اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع $ا_{۱} ا_{۲} \cdots ا_{۲ن+۱}$ بنایا گیا ہے اگر و $ا_{ن+۱}$ دائرہ کا

قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$و ا_1 \times و ا_2 \times و ا_3 \quad . \quad . \quad \cdots \quad و ا_ن = ر^ن$$

۲۸ — ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع $ا_1\, ا_2 \cdots ا_ن$ ہے۔ اس کے گرد ایک بیرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اس کے سب راسوں میں سے گزرتا ہے۔ اور ایک اندرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اندر کی طرف سے اس کے سب اضلاع کو مس کرتا ہے۔ کثیر الاضلاع کے مرکز د میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اندرونی دائرہ سے $ق_1$ پر اور بیرونی دائرہ سے $ق_2$ پر ملتا ہے۔ اگر $ق_1$ اور $ق_2$ دونوں میں سے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ $ق_1$ میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کو $ق_2$ میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت

$$جم^ن \frac{\pi}{ن}\; مم^2 \frac{ن ط}{2} : 1$$

ہوگی جہاں ط وہ زاویہ ہے جو خطوط $و ق_1 ق_2$ اور $و ا_1$ کے درمیان بنتا ہے۔

۲۹ — ایک دائرہ کا نصف قطر $ا_1$ ہے اور مرکز و۔ دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ...... بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر ق کوئی نقطہ ہو تو

$$ق ا^2 \times ق ب^2 \times ق ج^2 \cdots\cdots = ر^{2ن} - 2 ا_1^ن ر_1^ن جم ن ط + ا_1^{2ن}$$

جہاں $ر_1$ سے مراد و ق کا طول ہے اور ط سے مراد زاویہ ق و ا ہے

نیز ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو ا ق، ب ق، ج ق ...... بالترتیب و ا، و ب، و ج، ...... محدودہ کے ساتھ بناتے ہیں

$$مس^{-1} \frac{ر_1^ن جب ن ط}{ر_1^ن جم ن ط - ا_1^ن}$$ ہے۔

جب ط اور جم ط کی تحلیل اجزائے ضربی میں

۱۲۲ - جب ط کو اجزائے ضربی کے ایک لا متناہی سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو

ہمیں معلوم ہے کہ $\text{جب ط} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}$

$$= 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ط}}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اسی طرح سے مساوات (۱) میں ط کو بالترتیب $\frac{\text{ط}}{2}$ اور $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ط}}{2}\right)$ میں بدلنے سے

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^2}\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right) = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^2}\,\text{جب}\left(\frac{2\pi}{2^2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right)$$

$$\text{اور جب}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\text{ط}}{2}\right) = 2\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{2^2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right)\times\text{جب}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right)$$

$$= 2\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{2^2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right)\text{جب}\left(\frac{3\pi}{2^2}+\frac{\text{ط}}{2^2}\right)$$

مساوات (۱) کی بائیں جانب یہ قیمتیں مندرج کر کے رقوم کو ترتیب وار لکھنے سے

$$\text{جب ط} = 2^3\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^2}\,\text{جب}\,\frac{\pi+\text{ط}}{2^2}\,\text{جب}\,\frac{2\pi+\text{ط}}{2^2}\,\text{جب}\,\frac{3\pi+\text{ط}}{2^2} \ldots (2)$$

ایک مرتبہ اور مساوات (۲) کے بائیں جانب یہی عمل کرنے اور رقوم محصلہ کو ترتیب وار لکھنے سے

$$\text{جب ط} = 2^7\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{\pi+\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{2\pi+\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{3\pi+\text{ط}}{2^3}$$

$$\times\,\text{جب}\,\frac{4\pi+\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{5\pi+\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{6\pi+\text{ط}}{2^3}\,\text{جب}\,\frac{7\pi+\text{ط}}{2^3} \ldots (3)$$

کئی بار مسلسل یہی عمل کرنے سے بالآخر

$$\text{جب}\,ط = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}\,\frac{ط}{ن}\,\text{جب}\,\frac{\pi+ط}{ن}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi+ط}{ن}\,.....\,\text{جب}\,\frac{(ن-۱)\pi+ط}{ن}\quad........(۴)$$

جہاں ن، ۲ کی قوت کو تعبیر کرتا ہے۔

مساوات (۴) میں آخری جزو ضربی

$$\text{جب}\left[\pi-\frac{\pi-ط}{ن}\right] = \text{جب}\,\frac{\pi-ط}{ن}$$

ہے، آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$\text{جب}\,\frac{(ن-۲)\,\pi+ط}{ن} = \text{جب}\left[\pi-\frac{۲\pi-ط}{ن}\right] = \text{جب}\,\frac{۲\pi-ط}{ن}$$

ہے اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے دوسرے جزو ضربی اور آخری جزو ضربی کو اکٹھا لینے سے، اور تیسرے جزو ضربی اور آخر کی طرف سے دوسرے جزو ضربی کو اکٹھا لینے سے، ..... علیٰ ہذا القیاس، مساوات (۴) ذیل کی شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے

$$\text{جب}\,ط = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}\,\frac{ط}{ن}\left[\text{جب}\,\frac{\pi+ط}{ن}\,\text{جب}\,\frac{\pi-ط}{ن}\right]\left[\text{جب}\,\frac{۲\pi+ط}{ن}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi-ط}{ن}\right]\quad.....(۵)$$

اس میں آخری جزو ضربی

$$= \text{جب}\,\frac{\frac{ن}{۲}\pi+ط}{ن} = \text{جب}\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{ط}{ن}\right) = \text{جم}\,\frac{ط}{ن}\quad \text{ہے،}$$

اسلئے مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\left[\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}-\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\left[\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{\text{ن}}-\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\dots$$

$$\dots\left[\text{جب}^{۲}\frac{\pi\left(\frac{\text{ن}}{۲}-۱\right)}{\text{ن}}-\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right]\times\text{جم}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\quad\dots\dots(۶)$$

مساوات (۶) کی دونوں جانبوں کو جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ پر تقسیم کرو اور ط کو صفر بناؤ

چونکہ $\lim_{\text{ط}\to۰}\left[\dfrac{\text{جب ط}}{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right] = \lim_{\text{ط}\to۰}\left[\text{ن}\,\dfrac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\times\dfrac{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right] = \text{ن}$

اسلئے مساوات (۶) ہوجاتی ہے

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}^{۲}\frac{۳\pi}{\text{ن}}\dots\text{جب}^{۲}\frac{\pi\left(۱-\frac{\text{ن}}{۲}\right)}{\text{ن}}\dots(۷)$$

مساوات (۶) کو مساوات (۷) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جب ط} = \text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\left[۱-\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}\frac{۳\pi}{\text{ن}}}\right]\dots$$

$$\dots\left[۱-\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}\left(۱-\frac{\text{ن}}{۲}\right)}\right]\text{جم}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\quad\dots(۸)$$

اب ن کو لاانتہا بڑھاؤ تب

چونکہ $\lim_{\text{ن}\to\infty}\left[\text{ن جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right] = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left[\dfrac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\times\text{ط}\right] = \text{ط}\dots$ (دفعہ ۴۳ حصہ اول)

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left[\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}}\right] = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left[\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}}\times\frac{\frac{\pi^{۲}}{\text{ن}^{۲}}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{\text{ن}}}\times\frac{\text{ط}^{۲}}{\pi^{۲}}\right] = \frac{\text{ط}^{۲}}{\pi^{۲}}\dots\text{دفعہ ۴۳ حصہ اول}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اسلئے

$$\text{جب ط} = \text{ط}\left(۱-\frac{\text{ط}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{ط}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{\text{ط}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\text{...... تا لاتناہی}$$

یہ مسئلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جب ط} = \text{ط}\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\infty}\left(۱-\frac{\text{ط}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)$$

۱۲۳۔ جم طہ کو اجزائے ضربی کے ایک لاتناہی سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۴) میں ط کی بجائے مقدار ط + $\frac{\pi}{۲}$ لکھو تب یہ مساوات ہوجاتی ہے

$$\text{جم ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\frac{\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۳\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۵\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\cdots$$

$$\cdots\,\text{جب}\frac{(۲\text{ن}-۱)\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\cdots\cdots\;(۱)$$

آخری جزو ضربی

$$=\text{جب}\left[\pi-\frac{\pi-۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]=\text{جب}\frac{\pi-۲\text{ط}}{۲\text{ن}}$$

آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$=\text{جب}\left[\frac{(۲\text{ن}-۳)\pi+۲\text{ط}}{۲\text{ن}}\right]=\text{جب}\frac{۳\pi-۲\text{ط}}{۲\text{ن}}$$

اور علیٰ ہذا القیاس

لہٰذا حسب سابق دو دو اجزائے ضربی کو اکٹھا لینے سے

$$\text{جم طہ} = ۲^{ن-۱}\left[\text{جب}\frac{\pi+۲\text{طہ}}{۲ن}\,\text{جب}\frac{\pi-۲\text{طہ}}{۲ن}\right]\left[\text{جب}\frac{۳\pi+۲\text{طہ}}{۲ن}\,\text{جب}\frac{۳\pi-۲\text{طہ}}{۲ن}\right]\ldots\ldots$$

$$= ۲^{ن-۱}\left[\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲ن}-\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}\right]\left[\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲ن}-\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}\right]\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) میں طہ کو صفر بنانے سے

$$۱ = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲ن}\,\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲ن}\,\text{جب}^۲\frac{۵\pi}{۲ن}\ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) کو (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جم طہ} = \left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲ن}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}}{\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲ن}}\right]\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}}{\text{جب}^۲\frac{۵\pi}{۲ن}}\right]\ldots$$

$$\ldots\left[۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{۲\text{طہ}}{۲ن}}{\text{جب}^۲\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن}}\right]\ldots\ldots (۴)$$

اب مساوات (۴) میں ن کو لا انتہا بڑھا دو، تب حسب دفعہ ماقبل

$$\text{جم طہ} = \left[۱-\frac{۴\text{طہ}^۲}{\pi^۲}\right]\left[۱-\frac{۴\text{طہ}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right]\left[۱-\frac{۴\text{طہ}^۲}{۵^۲\pi^۲}\right]\ldots\ldots \text{لا متناہی}$$

اختصار کی خاطر اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{جم طہ} = \prod_{ر=۱}^{ر=\infty}\left\{۱-\frac{۴\text{طہ}^۲}{(۲ر-۱)^۲\pi^۲}\right\}$$

چونکہ $\text{جم طہ} = \dfrac{\text{جب ۲طہ}}{\text{۲ جب طہ}}$

اس لئے جم طہ کا حاصل ضرب، جب ۲طہ اور جب طہ کے حاصل ضرب سے

سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

۱۲۴۔ دفعہ ۱۱۵ کی مدد سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۲) ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے درست رہتی ہے۔ کیونکہ ہمیں معلوم ہے کہ

لا^۲ن − ۲ لا^ن جم ن فہ + ۱ = {لا² − ۲ لا جم فہ + ۱}{لا² − ۲ لا جم (فہ + ۲π/ن) + ۱}
{لا² − ۲ لا جم (فہ + ۴π/ن) + ۱} . . . . ن اجزائے ضربی تک

اس میں لا = ۱ رکھنے سے

۲ (۱ − جم ن فہ) = {۲ − ۲ جم فہ}{۲ − ۲ جم (فہ + ۲π/ن)}.... ن اجزائے ضربی تک

یعنی ۴ جب² (ن فہ/۲) = ۴ جب² (فہ/۲) × ۴ جب² (فہ/۲ + π/ن) × ۴ جب² (فہ/۲ + ۲π/ن) ...
.... ن اجزائے ضربی تک

ن فہ/۲ = طہ رکھنے سے اور دونوں طرفوں کے جذر لینے سے

± جب طہ = ۲^(ن−۱) جب (طہ/ن) جب ((π + طہ)/ن) جب ((۲π + طہ)/ن) .... جب (((ن−۱)π + طہ)/ن)
.... (۱)

اگر طہ، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو بائیں جانب کے رکن کے سب اجزائے ضربی مثبت ہوتے ہیں اس لئے جب طہ بھی صریحاً مثبت ہوگا۔ لہٰذا مشتبہ علامت کی بجائے علامت مثبت ثبت کرنی چاہیئے۔

اگر طہ، π اور ۲π کے درمیان واقع ہو تو بائیں جانب کے رکن کے سب اجزائے ضربی مثبت ہوتے ہیں سوائے آخر جزو ضربی کے، جو منفی ہے۔ اس لئے حاصل ضرب منفی ہوگا اور نیز جب طہ منفی ہوگا۔ پس اس صورت میں بھی علامت ہمیشہ مثبت رکھی جائے گی۔

اسی طرح سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر صورت میں مثبت علامت لینی چاہیئے۔

...بنا ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے

جب ط = ۲^ن-۱ جب ط/ن جب (ط+π)/ن جب (ط+۲π)/ن ... جب (ط+(ن-۱)π)/ن

۱۲۸- جبز ط اور جمز ط کے اجزا ئے ضربی لا تناہی سلسلہ میں۔

دفعہ ۶۸ کی رو سے

جبز ط = - خ جب (خ ط) اور جمز ط = جم (خ ط)

نیز چونکہ دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کے سلسلے مسئلہ جمع پر مبنی ہیں اس لئے یہ اُس صورت میں بھی درست ہونگے جب ط کو خ ط میں بدل دیا جائے۔

$$\therefore \text{جبز ط} = -\text{خ} \times \text{خ ط} \left(1-\frac{\text{خ}^2\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{خ}^2\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{خ}^2\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots (1)$$

$$= \text{ط}\left(1+\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \text{تا لاتناہی}$$

$$\text{اور جمز ط} = \left(1-\frac{4\text{خ}^2\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{خ}^2\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{خ}^2\text{ط}^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots \text{تا لاتناہی}$$

$$\left(1+\frac{4\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\text{ط}^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots\ldots \text{تا لاتناہی} \ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) دونوں مستدق سلسلے ہیں۔ کیونکہ ہمیں معلوم ہے (دیکھو ہی سمتھ کا الجبرا دفعہ ۲۴۳) کہ سلسلہ لاتناہی Π (۱ + ع ن) مستدق ہوگا اگر Σ ع ن مستدق ہو۔

مساوات (۱) میں Σ ع ن

$$= \frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

اور ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ مستدق ہے۔

۱۲۹- طبعی اعداد کے متکافیوں کی قوتوں کے مجموعے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کی رو سے ہم چند دلچسپ سلسلوں کے حاصل

جمع معلوم کر سکتے ہیں

دفعات ۴۳ اور ۱۲۲ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots \text{تا لاتناہی}$$

$$=\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}=1-\frac{\text{ط}^2}{\lfloor 3}+\frac{\text{ط}^4}{\lfloor 5}+\cdots \text{تا لاتناہی}$$

طرفین کے لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)+\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)+\cdots\cdots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\frac{\text{ط}^2}{6}+\frac{\text{ط}^4}{120}-\cdots\cdots\right]\cdots \quad (1)$$

اب دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\right)=-\left[\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{\pi^6}+\cdots\cdots\right]$$

$$\text{اور لوک}\left(1-\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}\right)=-\left[\frac{\text{ط}^2}{2^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{2^4\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{2^6\pi^6}+\cdots\cdots\right]$$

. . .

لہذا مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$-\frac{\text{ط}^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right]-\frac{1}{2}\frac{\text{ط}^4}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\text{ط}^6}{\pi^6}\left[\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots\right]\cdots\cdots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\left(\frac{\text{ط}^2}{6}-\frac{\text{ط}^4}{120}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{\text{ط}^2}{6} - \frac{\text{ط}^4}{120} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ط}^2}{6} - \frac{\text{ط}^4}{120} + \cdots\right)^2 - \cdots$$

$$= -\frac{\text{ط}^2}{6} + \text{ط}^4\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{36}\right) - \cdots\cdots$$

$$= -\frac{\text{ط}^2}{6} - \frac{\text{ط}^4}{180} \cdots \qquad (2)$$

چونکہ مساوات (۲)، ط کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اسلئے ط^2 کے سر مساوات کے دونوں جانب برابر ہونے چاہئیں نیز ط^4 کے سر برابر ہونے چاہئیں، وغیرہ وغیرہ

$$\text{پس}\ -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \text{تا لا متناہی}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots \text{تا لا متناہی}\right) = -\frac{1}{180}$$

. . . .

$$\text{لہذا}\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \text{تا لا متناہی} = \frac{\pi^2}{6} \cdots \qquad (3)$$

$$\text{اور}\ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots \text{تا لا متناہی} = \frac{\pi^4}{90} \cdots\cdots \qquad (4)$$

۱۲۷ — یہی عمل دفعہ ۱۲۳ کے سلسلہ پر کرنے سے

$$\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

$$= \text{جم ط} = 1 - \frac{\text{ط}^2}{2!} + \frac{\text{ط}^4}{4!} \cdots\cdots$$

$$\text{جس سے}\ \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{3^2\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ط}^2}{5^2\pi^2}\right) + \cdots\cdots$$

$$= \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} - \cdots\right)\Big]$$

لہٰذا حسب سابق

$$-\frac{4\text{ط}^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{16\text{ط}^4}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$$

$$=\text{لوک}\left[1-\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\text{ط}^2}{2}+\frac{\text{ط}^4}{24}+\cdots-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ط}^4}{4}-\cdots\cdots\right)-\cdots\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\text{ط}^2}{2}-\frac{\text{ط}^4}{12}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ط^2 کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{2}$$

اور ط^4 کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$-\frac{8}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{12}$$

علیٰ ہٰذا القیاس ....

یعنی $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ .... (۱)

اور $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$ .... (۲)

....

۱۲۸ - والس کا ضابطہ..... دفعہ ۱۲۲ کے جملہ میں طہ کو $\frac{\pi}{۲}$ کے مساوی رکھنے سے

$$۱ = \frac{\pi}{۲}\left[۱-\frac{۱}{۲^۲}\right]\left[۱-\frac{۱}{۴^۲}\right]\left[۱-\frac{۱}{۶^۲}\right] \cdots \quad \cdots$$ تالاتناہی

$$= \frac{\pi}{۲}\times\frac{۳\times۱}{۲^۲}\times\frac{۵\times۳}{۴^۲}\times\frac{۷\times۵}{۶^۲}\cdots\cdots\frac{(۲ن-۳)(۲ن-۱)}{(۲ن-۲)^۲}\times\frac{(۲ن-۱)(۲ن+۱)}{(۲ن)^۲}$$

جہاں ن لاانتہا بڑا ہے

یعنی $$\frac{۲}{\pi} = \frac{۱^۲\times۳^۲\times۵^۲\times۷^۲\cdots\cdots(۲ن-۱)^۲\times(۲ن+۱)^۲}{۲^۲\times۴^۲\times۶^۲\cdots\cdots(۲ن)^۲}$$

یعنی $\frac{۲\times۴\times۶\cdots\cdots۲ن}{۱\times۳\times۵\times\cdots\cdots(۲ن-۱)} = \sqrt{\frac{\pi}{۲}(۲ن+۱)}$ جہاں ن لاانتہا بڑا ہے

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ن بہت بڑا ہو (لیکن ضروری نہیں کہ لا متناہی ہو) تو

$$\frac{۲\times۴\times۶\times\cdots\cdots۲ن}{۱\times۳\times۵\times\cdots\cdots(۲ن-۱)} = \sqrt{\frac{\pi}{۲}(۲ن+۱)}$$ تقریباً

جو بالآخر $= \sqrt{ن\pi}$

اس ضابطہ کو والس کا ضابطہ کہتے ہیں - اور اس سے اُس نسبت کی تقریبی قیمت نہایت آسان اور سادہ شکل میں ظاہر ہوتی ہے جو پہلے ن جفت اعداد کے حاصل ضرب کو پہلے ن طاق اعداد کے حاصل ضرب کے ساتھ ہے جبکہ ن بہت بڑا ہو

۱۲۹ - **مشق** - ثابت کرو کہ

$$مس\, طہ = ۸\, طہ \left\{\frac{۱}{\pi^۲-۴طہ^۲}+\frac{۱}{۳^۲\pi^۲-۴طہ^۲}+\frac{۱}{۵^۲\pi^۲-۴طہ^۲}+\cdots\cdots\right\}$$

دفعہ ۱۲۳ سے ظاہر ہے کہ

$$لوک\, جم\, طہ = لوک\left(۱-\frac{۴طہ^۲}{\pi^۲}\right)+لوک\left(۱-\frac{۴طہ^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)+لوک\left(۱-\frac{۴طہ^۲}{۵^۲\pi^۲}\right)+\cdots \quad (۱)$$

اس مساوات میں ط کی بجائے (ط + ھ) لکھنے سے

لوک جم (ط + ھ) = لوک [۱ − ۴/π² (ط + ھ)²] + لوک [۱ − ۴/(۳² π²) (ط + ھ)²] + ... (۲)

اب لوک جم (ط + ھ) = لوک [جم ط (جم ھ − مس ط جب ھ)]

= لوک جم ط + لوک [۱ − ھ²/۲! + ... − مس ط (ھ − ھ³/۳! + ...)] دفعہ ۳۳

= لوک جم ط + لوک [۱ − ھ مس ط + ھ کی بڑی قوتیں]

= لوک جم ط − ھ مس ط + ھ کی بڑی قوتیں .... (دفعہ ۸)

نیز لوک [۱ − ۴/π² (ط + ھ)²] = لوک (π² − ۴ ط²)/π² + لوک [۱ − ۸ ط ھ/(π² − ۴ ط²) + ...]

= لوک [۱ − ۴ ط²/π²] − ۸ ط ھ/(π² − ۴ ط²) + ھ کی بڑی قوتیں

اور لوک [۱ − ۴/(۳² π²) (ط + ھ)²]

= لوک [۱ − ۴ ط²/(۳² π²)] − ۸ ط ھ/(۳² π² − ۴ ط²) + ھ کی قوتیں۔

....

مساوات (۲) میں یہ قیمتیں درج کرنے اور مساوات کے دونوں طرف ھ کے سروں کو برابر کرنے سے

مس ط = ۸ ط/(π² − ۴ ط²) + ۸ ط/(۳² π² − ۴ ط²) + ۸ ط/(۵² π² − ۴ ط²) + ... (۳)

= Σ (ر = ۰ سے ر = ∞ تک) ۸ ط/((۲ر + ۱)² π² − ۴ ط²)

سلسلہ (۳) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \frac{۲}{\pi - ۲\text{ط}} - \frac{۲}{\pi + ۲\text{ط}} + \frac{۲}{۳\pi - ۲\text{ط}} - \frac{۲}{۳\pi + ۲\text{ط}} + \cdots\cdots$$

جو طالب علم احصار تفرقات سے واقف ہے۔ اس سے مخفی نہیں کہ مساوات (۳) مساوات (۱) کو بلحاظ ط کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۳۰- مشق- ثابت کرو کہ جمز ۲ عہ - جم ۲ ط

$$= ۲\,\text{جب}^۲\text{ط}\left[۱ + \frac{\text{عہ}^۲}{\text{ط}^۲}\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi + \text{ط}}\right)^۲\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi - \text{ط}}\right)^۲\right]$$

$$\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi + \text{ط}}\right)^۲\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi - \text{ط}}\right)^۲\right]\cdots\cdots \text{تالامتناہی}$$

$$= ۲\,\text{جب}^۲\text{ط}\;\Pi\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\text{ر}\pi + \text{ط}}\right)^۲\right]$$

جہاں ر صفر ہے یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

$$\text{جمز ۲ عہ} - \text{جم ۲ ط} = \text{جم ۲ خ عہ} - \text{جم ۲ ط} = ۲\,\text{جب}(\text{ط} + \text{خ عہ})\,\text{جب}(\text{ط} - \text{خ عہ})$$

$$= ۲(\text{ط} + \text{خ عہ})\left[۱ - \frac{(\text{ط} + \text{خ عہ})^۲}{\pi^۲}\right]\left[۱ - \frac{(\text{ط} + \text{خ عہ})^۲}{۲^۲\pi^۲}\right]\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \times (\text{ط} - \text{خ عہ})\left[۱ - \frac{(\text{ط} - \text{خ عہ})^۲}{\pi^۲}\right]\left[۱ - \frac{(\text{ط} - \text{خ عہ})^۲}{۲^۲\pi^۲}\right]\cdots \qquad (۱)$$

$$\text{اب}\quad\left[۱ - \frac{(\text{ط} + \text{خ عہ})^۲}{\pi^۲}\right]\left[۱ - \frac{(\text{ط} - \text{خ عہ})^۲}{\pi^۲}\right]$$

$$= \left[\frac{(\pi + \text{ط} + \text{خ عہ})(\pi - \text{ط} - \text{خ عہ})}{\pi^۲}\right]\left[\frac{(\pi + \text{ط} - \text{خ عہ})(\pi - \text{ط} + \text{خ عہ})}{\pi^۲}\right]$$

$$= \frac{(\pi + \text{ط})^۲ + \text{عہ}^۲}{\pi^۲} \times \frac{(\pi - \text{ط})^۲ + \text{عہ}^۲}{\pi^۲}$$

پس مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{جمز}\ ۲\ \text{عہ} - \text{جم}\ ۲\ \text{طہ} = ۲(\text{طہ}^2 + \text{عہ}^2)\left[\frac{(\pi + \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{\pi^2}\right]\left[\frac{(\pi - \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{\pi^2}\right]$$

$$\left[\frac{(۲\pi + \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{۴\pi^2}\right]\left[\frac{(۲\pi - \text{طہ})^2 + \text{عہ}^2}{۴\pi^2}\right] \ldots \text{تا لا متناہی} \ldots (۲)$$

مساوات (۲) میں عہ = صفر رکھنے سے

$$۲\ \text{جب}^2\ \text{طہ} = ۲\ \text{طہ}^2 \times \frac{(\pi + \text{طہ})^2}{\pi^2} \times \frac{(\pi - \text{طہ})^2}{\pi^2} \times \frac{(۲\pi + \text{طہ})^2}{۴\pi^2} \times \frac{(۲\pi - \text{طہ})^2}{۴\pi^2} \ldots$$

$$\ldots \text{تا لا متناہی} \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جمز}\ ۲\ \text{عہ} - \text{جم}\ ۲\ \text{طہ}$$

$$= ۲\ \text{جب}^2\ \text{طہ}\left[۱ + \frac{\text{عہ}^2}{\text{طہ}^2}\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi - \text{طہ}}\right)^2\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\pi + \text{طہ}}\right)^2\right]\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi - \text{طہ}}\right)^2\right]$$

$$\left[۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{۲\pi + \text{طہ}}\right)^2\right] \ldots \text{تا لا متناہی}$$

اب جمز ۲ عہ + جم ۲ طہ کے اجزائے ضربی طہ کو $\text{طہ} + \frac{\pi}{۲}$ میں بدل دینے سے معلوم ہو سکتے ہیں اور یہ اجزائے ضربی

$$۲\ \text{جم}^2\ \text{طہ}\ \Pi\left\{۱ + \left(\frac{\text{عہ}}{\text{ر}\pi + \text{طہ}}\right)^2\right\}$$ ہیں جہاں ر سے کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد مراد ہے

امثلہ ۲۱

ثابت کرو کہ

۱۔ $\frac{۱}{۱^2} - \frac{۱}{۲^2} + \frac{۱}{۳^2} - \frac{۱}{۴^2} + \ldots\ldots\ldots$ تا لا متناہی $= \frac{\pi^2}{۱۲}$

۲ — $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^4}{90}$

۳ — $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 6}+\frac{1}{4\times 8}+\cdots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^2}{12}$

۴ — $\frac{1}{3^3}+\frac{3}{5^3}+\frac{6}{7^3}+\frac{10}{9^3}+\cdots$ تا لاتناہی $=\frac{\pi^2}{64}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$

۵ — ثابت کرو کہ اگر تمام طاق اعداد کے مربعوں کے متکافیوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^4}{384}$ ہوتا ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ اگر تمام طبعی اعداد کے مربعوں کے متکافیوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^4}{120}$ ہوگا۔

ثابت کرو کہ

۷ — $\cot\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{2\theta}{\pi^2-\theta^2}-\frac{2\theta}{2^2\pi^2-\theta^2}-\cdots\cdots$

$=\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta-\pi}+\frac{1}{\theta+\pi}+\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta+2\pi}+\cdots$ تا لاتناہی

۸ — $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta-\pi}-\frac{1}{\theta+\pi}+\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta+2\pi}-\frac{1}{\theta-3\pi}-\frac{1}{\theta+3\pi}+\cdots$

$$=\frac{1}{\theta}+2\theta\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{\theta^2-n^2\pi^2}$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$\frac{1+\theta\operatorname{cosec}\theta}{2\theta^2}=\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{\theta^2-\pi^2}+\frac{1}{\theta^2-2^2\pi^2}-\cdots\cdots$ تا لاتناہی

[ربط $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}\right)$ کو استعمال کرو]

۹ — $\frac{1}{4\pi}\sec\theta=\frac{1}{\pi^2-4\theta^2}-\frac{3}{3^2\pi^2-4\theta^2}+\frac{5}{5^2\pi^2-4\theta^2}-\cdots\cdots$ تا لاتناہی

[ربط $۲\ \text{قط}\ \text{طہ} = \text{قس}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{طہ}}{۲}\right)+\text{قم}\left(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\text{طہ}}{۲}\right)$ کو استعمال کرو]

۱۰۔ $\frac{۱}{۴}\text{قط}^{۲}\text{طہ} = \frac{۱}{(\pi-۲\text{طہ})^{۲}}+\frac{۱}{(۲\text{طہ}+\pi)^{۲}}+\frac{۱}{(۳\pi-۲\text{طہ})^{۲}}+\frac{۱}{(۲\text{طہ}+۳\pi)^{۲}}+\cdots$ تا لاانتہا

[دفعہ ۱۲۹ کا عمل اسی دفعہ کے جواب پر دوبارہ کرو]

۱۱۔ $\text{قم}^{۲}\text{طہ} = \frac{۱}{\text{طہ}^{۲}}+\frac{۱}{(\text{طہ}-\pi)^{۲}}+\frac{۱}{(\text{طہ}+\pi)^{۲}}+\frac{۱}{(\text{طہ}-۲\pi)^{۲}}+\frac{۱}{(\text{طہ}+۲\pi)^{۲}}+\cdots$ تا لاانتہا

ثابت کرو کہ

۱۲۔ $\frac{\text{جب}(\text{عہ}-\text{طہ})}{\text{جب عہ}} = \left(۱-\frac{\text{طہ}}{\text{عہ}}\right)\left(۱+\frac{\text{طہ}}{\pi-\text{عہ}}\right)\left(۱-\frac{\text{طہ}}{\pi+\text{عہ}}\right)\left(۱+\frac{\text{طہ}}{۲\pi-\text{عہ}}\right)\left(۱-\frac{\text{طہ}}{۲\pi+\text{عہ}}\right)\cdots$

$= \Pi\left(۱-\frac{\text{طہ}}{\text{عہ}+\text{ر}\pi}\right)$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

۱۳۔ $\frac{\text{جب}(\text{عہ}+\text{طہ})}{\text{جب عہ}} = \Pi\left(۱+\frac{\text{طہ}}{\text{عہ}+\text{ر}\pi}\right)$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

۱۴۔ $\frac{\text{جم}(\text{عہ}+\text{طہ})}{\text{جم عہ}} = \left(۱+\frac{۲\text{طہ}}{\pi+۲\text{عہ}}\right)\left(۱-\frac{۲\text{طہ}}{\pi-۲\text{عہ}}\right)\left(۱+\frac{۲\text{طہ}}{۳\pi+۲\text{عہ}}\right)\left(۱-\frac{۲\text{طہ}}{۳\pi-۲\text{عہ}}\right)\cdots = \Pi\left[۱+\frac{۲\text{طہ}}{۲\text{عہ}+\text{ر}\pi}\right]$

جہاں ر سے مراد کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

۱۵۔ $\frac{\text{جم}(\text{عہ}-\text{طہ})}{\text{جم عہ}} = \Pi\left[۱-\frac{۲\text{طہ}}{۲\text{عہ}+\text{ر}\pi}\right]$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

$$\text{۱۔}\quad \frac{\text{جم ط} + \text{جم ع}}{۱ + \text{جم ع}} = \left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(\pi + \text{ع})^۲}\right]\left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(\pi - \text{ع})^۲}\right]\left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(۳\pi + \text{ع})^۲}\right]$$

$$\left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(۳\pi - \text{ع})^۲}\right] \cdots\cdots = \Pi\left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(\text{ر}\pi + \text{ع})^۲}\right]$$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

[مشق ۱۴ اور ۱۵ کے جوابوں کو ضرب دو اور پھر ۲ ط کو ط میں اور ۲ ع کو ع میں بدل دو]

$$\text{۱۔}\quad \frac{\text{جم ط} - \text{جم ع}}{۱ - \text{جم ع}} = \left\{۱ - \frac{\text{ط}^۲}{\text{ع}^۲}\right\}\left\{۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(۲\pi + \text{ع})^۲}\right\}$$

$$\left\{۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(۲\pi - \text{ع})^۲}\right\}\left\{۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(۴\pi + \text{ع})^۲}\right\}\cdots\cdots = \Pi\left[۱ - \frac{\text{ط}^۲}{(\text{ر}\pi + \text{ع})^۲}\right]$$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

اس سے جمز لا − جم ع کے اجزائے ضربی مستنبط کرو۔

$$\text{۱۔}\quad \frac{\text{جب ع} - \text{جب ط}}{\text{جب ع}} = \left(۱ - \frac{\text{ط}}{\text{ع}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ط}}{\pi - \text{ع}}\right)\left(۱ + \frac{\text{ط}}{\pi + \text{ع}}\right)$$

$$\left(۱ + \frac{\text{ط}}{۲\pi - \text{ع}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ط}}{۲\pi + \text{ع}}\right)\cdots\cdots$$

$$\text{۱۔}\quad ۲\,\text{جمز ط} + ۲\,\text{جم ط} = ۴\,\text{جم}^۲\frac{\text{ع}}{۲}\left[۱ + \frac{\text{ط}^۲}{(\pi + \text{ع})^۲}\right]\left[۱ + \frac{\text{ط}^۲}{(\pi - \text{ع})^۲}\right]\cdots\cdots\cdots$$

$$= ۴\,\text{جم}^۲\frac{\text{ع}}{۲}\,\Pi\left[۱ + \frac{\text{ط}^۲}{(\text{ر}\pi + \text{ع})^۲}\right]$$ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے

۲۰ ـ ثابت کرو کہ

$$\text{جبز ن ی} = \text{ن جبزی} \prod_{ر=۱}^{ر=ن-۱} \left[۱ + \frac{\frac{\text{جبز}^۲ ی}{۲}}{\text{جب}^۲ \frac{ر\pi}{۲ن}} \right]$$

اور اس سے جبزی کے اجزاے ضربی کے لئے حاصل ضربوں کا ایک ایسا [لا]متناہی سلسلہ مستنبط کرو جس کا ہر جز و ضربی بلحاظ ی کے درجہ دوم کی ایک رقم ہو۔
[د]فعہ ۱۲۱ کی مشق اول کے جواب سے شروع کرو، پہلے طہ کو صفر بناؤ اور پھر اس [ج]واب میں فہ کو صفر کرو، بعدازاں تقسیم کرو]

۲ ـ ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

$$(۱+\frac{۱}{۱^۲})(۱+\frac{۱}{۲^۲})(۱+\frac{۱}{۳^۲}) \cdots \text{تا لا متناہی}$$

کا حاصل ضرب $\frac{۱}{\pi}$ جبز π ہے۔

۲۱ ـ ایک نصف دائرہ کے محیط کے م برابر حصے کئے گئے ہیں اور ایک [د]وسرے ہم مرکز نصف دائرہ کے جو پہلے نصف دائرہ کے ہم وضع رکھا گیا ہے ن [برا]بر حصے کئے گئے ہیں۔ پہلے نصف دائرہ کا ہر ایک نقطہ تقسیم دوسرے نصف [دا]ئرہ کے ہر ایک نقطہ تقسیم سے ملایا گیا ہے۔ ان نقاط کے ملانے والے خطوں کے [مر]بعوں کا اوسط حسابی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اگر م اور ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے [تو ا]وسط کو ر $ا^۲ + ب^۲ - \frac{۸ اب}{\pi^۲}$ ہوگا۔ جہاں ا اور ب نصف دائروں کے نصف قطر ہیں۔

۲ ـ ہم مرکز دائروں کا ایک لا متناہی نظام دیا ہوا ہے، ان دائروں کے نصف قطر [بالت]رتیب ا، $\frac{ا}{۲}$، $\frac{ا}{۳}$ ..... ہیں۔ ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ مشترک مرکز سے ج (> ا) ہے [ا]ن دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان مماسوں کے محاذی مشترک

[مرکز پ]ر بالترتیب زاویے $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$ ...... بنیں تو

$$\text{جب ط} \cdot \text{جب ط} \cdot \text{جب ط} \ldots\ldots = \sqrt{\frac{ج}{۴ ل}}\ \text{جب}\,\frac{۴ ل}{ج}$$

۲۴۔ نقاط کی ایک لامتناہی تعداد ایک لا متناہی طول کے خط مستقیم کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر مساوی حصہ کا طول ا ہے، اگر ن ایک ایسا نقطہ ہو جس کا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور ایک نقطہ تقسیم سے ن کا وہ فاصلہ جو خط مستقیم پر ناپا جائے لا ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے جو فاصلے سب نقاط تقسیم سے ہیں ان کے معکوسوں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\pi}{ما} \times \frac{\text{جبمز}\,\frac{۲\pi ما}{ا}}{\text{جمز}\,\frac{۲\pi ما}{ا} - \text{جم}\,\frac{۲\pi لا}{ا}}$$

ہوگا [مشق ۸ کے جواب کو استعمال کرو]

۲۵۔ اگر ا، ب، ج .... سے تمام مفرد اعداد ۲، ۳، ۵، ..... مراد لیے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\left(۱-\frac{۱}{ا^۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{ب^۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{ج^۲}\right)\ldots\ldots = \frac{۸}{\pi^۲}$$

اور

$$\left(۱+\frac{۱}{ا^۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{ب^۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{ج^۲}\right)\ldots\ldots = \frac{۱۵}{\pi^۲}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$\prod_{م\to ۱}^{م\to\infty}\left[۱-\frac{لا}{م^۲-ج^۲}\right] = \frac{ج}{\sqrt{ج^۲+لا}} \cdot \frac{\text{جب}\left\{\pi\sqrt{ج^۲+لا}\right\}}{\text{جب}\,\pi ج}$$

باب دہم

اصول اجزائے متناسب

۱۳۱- اس باب میں ہم اجزائے تناسب کے اصول پر بحث کرینگے اس اصول کی صداقت کو ہم نے حصہ اول باب یازدہم میں بلاثبوت تسلیم کرلیا تہا- وہاں ہم نے یہ تسلیم کیا تھا کہ اگر ن اور ن+۱ دو متصل اعداد ہوں جن کے لوکارتم جدولوں میں دئے ہوئے ہوں اور اگر ھ کوئی کسر ہو تو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\text{ھ} = \text{ـ ـ} \frac{\text{لوک}\,(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک ن}}{\text{لوک}\,(\text{ن} + ۱) - \text{لوک ن}}$$

اب ہم اس بیان کی صحت پر غور کرینگے-

۱۳۲- مروج لوکارتم- دفعہ ۱۲ کی رو سے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \text{لوک}_{۱۰}\,\frac{\text{ن}+\text{ھ}}{\text{ن}} = \text{مب}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{ن}}\right)$$

جہاں مب = ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸ ..

پس دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \frac{\text{مب}\,\text{ھ}}{\text{ن}} - \frac{\text{مب}}{۲} \times \frac{\text{ھ}^۲}{\text{ن}^۲} + \frac{\text{مب}}{۳} \times \frac{\text{ھ}^۳}{\text{ن}^۳} - \text{———} \quad (۱)$$

اب لوکارتم کی معمولی جدولوں میں ن پانچ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے

یعنی نؔ ۱۰۰۰ سے کم نہیں ہوتا اس لئے اگر ھ، ایک سے کم ہو تو

$\frac{\text{سب}}{۲} \times \frac{\text{ھ}^۲}{\text{ن}^۲}$ کم ہوگا $\frac{۱}{۲}$ (٫۴۳۴۲۹۴۴۸...) $\times \frac{۱}{۱۰^۶}$ سے

یعنی کم ہوگا $\frac{٫۲۱۷۱۴۷۲۴}{۱۰^۹}$ سے

یعنی ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۱.... سے

اور $\frac{\text{سب}}{۲} \times \frac{\text{ھ}^۲}{\text{ن}^۲}$، تو اس کے بھی دس ہزار ویں حصہ سے کم ہے اس لئے اگر مساوات (۱) کی بائیں جانب کے رکن میں پہلی رقم کے بعد کی سب رقوم چھوڑ دی جائیں تو اعشاریہ کے کم ازکم ساتویں مقام تک کوئی فرق نہیں آئے گا۔ اس لئے اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\text{ن} = \frac{\text{سب} \times \text{ھ}}{\text{ن}}$$

$$\text{پس لوک}_{۱۰}(\text{ن} + ۱) - \text{لوک}_{۱۰}\text{ن} = \frac{\text{سب} \times ۱}{\text{ن}}$$

اس لئے عمل تقسیم سے

$$\frac{\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{۱۰}\text{ن}}{\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + ۱) - \text{لوک}_{۱۰}\text{ن}} = \text{ھ}$$

اسلئے اصول اجزائے متناسب معمولی اعداد کے اُن لوکارتموں کے لئے جو جدولوں میں دیئے ہوئے ہیں درست ہے۔

۱۳۴- اس موقع پر یہ دریافت کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ جداول میں چھوٹے سے چھوٹا عدد کونسا ہے جس پر اجزائے متناسب کے اصول کا اطلاق ہوسکتا ہے۔

اس غرض کے لئے ہمیں ن کی ایسی قیمت معلوم کرنی چاہئے جو

مقدار $\frac{\text{مپ}}{۲}\cdot\frac{\text{ص}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}$ کو $\frac{۱}{۱۰^{\text{ی}}}$ سے کم بنا دے۔

یعنی $\text{ن}^{۲} > \frac{\text{مپ}}{۲} \times ۱۰^{\text{ی}} \times \text{ص}^{۲}$

چونکہ ص کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہو سکتی ہے اس لئے

$\text{ن}^{۲} > \frac{\text{مپ}}{۲} \times ۱۰^{\text{ی}}$ یعنی $>$ ۲۱٬۱۴٬۲۲۶۴٫۰۰ ..

$\therefore$ ن $>$ ۱۴٬۳

اس لئے مطلوبہ چھوٹے سے چھوٹا عدد ۱۴٬۳۳ ہے

۱۳۴۔ طبعی جیوب۔ فرض کرو کہ ایک جدول میں زاویوں کے متواتر فرقوں کے لئے ہمارے پاس اندراجات موجود ہیں۔ اور ان متواتر فرقوں میں سے ہر ایک میں نیم قطری زاویوں کی تعداد ص ہے۔

[ہماری معمولی جدولوں میں ص = آئیں کے نیم قطریوں کی تعداد

$= \frac{\text{π}}{۱۸۰ \times ۶۰} = ۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸....$

یعنی ص $<$ ۰٫۰۰۰۳]

نیز فرض کرو کہ ک ص سے کم ہے۔ ہمارا اصول یہ تھا کہ

$$\frac{\text{جب}\,(\text{ط} + \text{ک}) - \text{جب ط}}{\text{جب}\,(\text{ط} + \text{ص}) - \text{جب ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ص}}$$

اب ہم اس مفروضہ کے جواز پر غور کرتے ہیں۔

$\text{جب}\,(\text{ط} + \text{ک}) - \text{جب ط} = \text{جب ط جم ک} + \text{جم ط جب ک} - \text{جب ط}$

$= \text{جب ط}\left[۱ - \frac{\text{ک}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ک}^{۴}}{\lfloor ۴} - ....\right] + \text{جم ط}\left[\text{ک} - \frac{\text{ک}^{۳}}{\lfloor ۳} + ...\right] - \text{جب ط}$

... (دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$= \text{ک جم ط} - \frac{\text{ک}^{۲}}{\lfloor ۲}\,\text{جب ط} - \frac{\text{ک}^{۳}}{\lfloor ۳}\,\text{جم ط} ...$

تیسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ = $\frac{۱}{۲}$ ک۲ اور یہ ہمیشہ $\frac{۱}{۲}$ (۰۰۰۳ء۰)۲
سے یعنی ۰۰۰۰۰۶ء۰ سے کم ہوتی ہے۔ پس تیسری رقم اور رقوم
مابعد بلا خوف نظر انداز کی جا سکتی ہیں۔ تب

جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط - $\frac{ک^۲}{۲}$ جب ط .... (۱)

پہلی رقم کی عددی نسبت دوسری رقم کے ساتھ

= $\frac{۱}{۲}$ ک مس ط .... (۲)

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے
جب ط، $\frac{π}{۲}$ کے تقریباً برابر ہو، اس لئے سوائے اُس صورت
کے جب زاویہ ط، قائمہ کے تقریبا برابر ہو مساوات (۱) میں
دوسری رقم کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے

تب جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط

اسی طرح سے جب (ط + ھ) - جب ط = ھ جم ط

لہذا $\frac{\text{جب (ط + ک) - جب ط}}{\text{جب (ط + ھ) - جب ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ھ}}$ ...... (۳)

اگر ط، زاویہ قائمہ کے بالکل قریب ہو تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ

جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط

اور اس لئے ربط (۳) اس صورت میں قائم نہیں رہتا اور جیب کا
فرق زاویہ کے فرق کے تناسب نہیں ہوتا، پس اس صورت
میں فرق بے قاعدہ ہوتے ہیں لیکن ساتھ ہی فرق
نہایت خفیف ہونگے کیونکہ اگر ط، $\frac{π}{۲}$ کے بالکل قریب ہو تو ک جم ط
نہایت چھوٹا ہوگا۔ دراصل اگر زاویہ ط اور زاویہ قائمہ کا فرق چند

ثانیوں سے متجاوز نہ ہو تو ک جم ط کی قیمت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک سب صفر ہوں گے۔ نیز

ک^۲/۲ جب ط ہمیشہ < (۰۰۰۳)^۲/۲ یعنی < ۰۰۰۰۰۰۵...

اس سے ثابت ہوا کہ جب زاویہ ط قائمہ کے بالکل قریب ہو تو زاویہ ط میں نسبتاً زیادہ تبدیلی واقع ہونے سے زاویہ مذکور کی جیب میں نسبتاً تھوڑی تبدیلی واقع ہوگی، نیز یہ تبدیلیاں بے قاعدہ ہونگی۔

۱۳۵۔ طبعی جیوب التمام۔ چونکہ کسی زاویہ کی جیب التمام زاویہ مذکور کے متمم کی جیب کے برابر ہوتی ہے اس لئے یہ صورت بھی درحقیقت جیب ہی کی صورت کے مماثل ہے۔ پس اصول مذکورہ برقرار رہے گا سوائے اس صورت کے جب زاویہ ط صفر کے قریب ہو، موخر الذکر صورت میں فرق حسب سابق بے قاعدہ اور نہایت خفیف ہوں گے۔

۱۳۶۔ طبعی مماسات۔ سابقہ طریق کتابت کے بموجب

مس (ط + ک) ـ مس ط = (مس ط + مس ک)/(۱ ـ مس ط مس ک) ـ مس ط

= (مس ک قط^۲ ط)/(۱ ـ مس ط مس ک)

= مس ک قط^۲ ط (۱ + مس ط مس ک + مس^۲ ط مس^۲ ک ....)

= قط^۲ ط [ک + ک^۳/۳ + ...] [۱ + مس ط (ک + ک^۳/۳ + ...) + مس^۲ ط (ک^۲ + ...) ...] (دفعہ ۳۴)

= ک قط^۲ ط + ک^۲ جب ط/جم^۳ ط + ک^۳ قط^۲ ط [۱/۳ + مس^۲ ط] + ... (۱)

تیسری رقم اور رقوم مابعد حسب سابق ترک کی جا سکتی ہیں سوائے اس صورت کے جب زاویہ طہ قائمہ کے بہت قریب ہو۔

تب اگر مقدار $\text{ک}^2 \frac{\text{جب طہ}}{\text{جم}^3\text{ طہ}}$ بہت بڑی نہ ہو تو

مس (طہ + ک) ـ مس طہ = ک قط^2 طہ .... (۲)

اور اصول تقریباً درست اور برقرار رہیگا۔

اگر طہ > $\frac{\pi}{4}$، تو مساوات (۱) کی دوسری رقم > ۲ ک^2

پس اگر ہم ک کی بڑی سے بڑی قیمت (یعنی تقریباً ۳ . . . ۰ ر)

لیں تو اس سے اعشاریہ کے ساتویں مقام پر ملحوظ ہندسہ آئیگا۔ لہذا جب جدول کے زاویوں کا فرق آ ہو تو اصول زیر بحث $\frac{\pi}{4}$ سے بڑے زاویوں کے لئے درست نہیں ہوگا۔

۱۳۷۔ طبعی مماسات التمام ـ حسب دفعہ ماقبل یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اصول مذکورہ ان زاویوں کے لئے جو صفر اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں قابل اعتبار نہیں۔

۱۳۸۔ طبعی قاطع ـ ہم جانتے ہیں کہ قط (طہ + ک) ـ قط طہ

$$= \frac{1}{\text{جم طہ جم ک ـ جب طہ جب ک}} - \frac{1}{\text{جم طہ}}$$

$$= \text{قط طہ} \left\{ \frac{1}{1 - \text{ک مس طہ} - \frac{1}{2}\text{ک}^2 \ldots} - 1 \right\}$$

$$= \text{قط طہ} \left[\text{ک مس طہ} + \text{ک}^2 \left(\tfrac{1}{2} + \text{مس}^2 \text{ طہ} \right) + \ldots \right]$$

$$= \text{ک قط طہ مس طہ} + \text{ک}^2 \text{ قط طہ} \left(\tfrac{1}{2} + \text{مس}^2 \text{ طہ} \right) + \ldots \ldots (1)$$

...دسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= ک \frac{\frac{1}{2} + مس^{2} ط}{مس ط} = ک \left[\frac{1}{2} مم ط + مس ط\right]$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط صفر یا $\frac{\pi}{2}$ کے بہت قریب ہو، اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے

قط (ط + ک) - قط ط = ک مس ط قط ط

...ں اصولِ مذکور ثابت ہوا۔

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو رقم ک قط ط مس ط بہت چھوٹی ہوگی اور ...رق بے قاعدہ ہونے کے علاوہ نہایت خفیف ہونگے۔ اگر ط، $\frac{\pi}{2}$ کے ...کل قریب ہو تو یہ رقم بڑی ہوگی، اس لئے اس صورت میں فرق خفیف ...ہوں گے۔

۱۳- **طبعی قاطع التمام**۔ جیسے قاطع کی صورت میں ثابت کیا گیا ہے ...یسے ہی قاطع التمام کی صورت میں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ فرق ...یف اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط، ۹۰ کے قریب ہو اور بے قاعدہ ...ں گے اگر ط صفر کے قریب ہو۔ سوائے ان صورتوں کے اصول ...قرار رہتا ہے۔

۱۴- **لوکارثمی جیوب کی جدولوں کے متعلق**۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$ل_{1} جب (ط + ک) - ل_{1} جب ط = لوک_{1} \frac{جب (ط + ک)}{جب ط}$$

$$= لوک_{1} [جم ک + مم ط جب ک] = لوک_{1} \left[1 + ک مم ط - \frac{ک^{2}}{2} \ldots\right]$$

(دفعات ۳۲ اور ۳۳)

= مب [ک مم طہ − $\frac{ک^۲}{۲}$ − $\frac{۱}{۲}$ ک² مم² طہ + ...]

(دفعات ۸ اور ۱۲)

= مب ک مم طہ − $\frac{مب ک^۲}{۲}$ قم² طہ ......

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

= $\frac{۱}{۲}$ ک $\frac{۱}{جب طہ مم طہ}$ = $\frac{ک}{جب ۲ طہ}$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ طہ صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو۔

لہذا سوائے ان دو صورتوں کے

ل جب (طہ + ک) − ل جب طہ = مب مم طہ × ک

میں اصول عام طور پر درست ہے۔

اگر طہ چھوٹا ہو تو رقم مب ک مم طہ بڑی ہوگی اور بنابرین فرق بڑے اور بے قاعدہ ہونگے۔ اس لئے ہم ان جدولوں میں جو اَ کے فرق پر مرتب کی گئی ہوں چھوٹے زاویوں پر اس اصول کا اطلاق نہیں کر سکتے۔

نیز خواہ جدولیں ۱۰َ کے فرقوں پر مرتب کی گئی ہوں تو بھی ہم اعشاریہ کے ساتویں مقام پر غلطی کے احتمال سے مطمئن نہیں ہو سکتے تاوقتیکہ طہ ۵° سے بڑا نہ ہو۔

اگر طہ ۹۰° کے بہت قریب ہو تو رقوم مب ک مم طہ اور $\frac{مب ک^۲}{۲}$ قم² طہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی۔ لہذا اگر طہ زاویہ قائمہ کے قریب ہو تو فرق خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے۔

۱۴۱ – لوگارثمی جیب التمام کی جدولوں کے متعلق – چونکہ کسی زاویہ کی

جیب اس زاویہ کے متمم کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اس لئے
اس صورت میں بھی اصول مذکور برقرار رہتا ہے سوائے ان دو صورتوں
کے جب زاویہ بہت چھوٹا ہو یا ۹۰ کے قریب ہو پہلی صورت میں
فرق بے قاعدہ اور نیز خفیف ہوں گے اور دوسری صورت میں
یہ بہت بڑے ہوں گے۔

۲۴۱۔ لوکارثمی مماسوں کی جدولوں کے متعلق۔ اس صورت میں

$$\text{ل مس (ط + ک) ۔ ل مس ط}$$

$$= \text{لوک}_{۱۰} \frac{\text{مس (ط+ک)}}{\text{مس ط}} = \text{لوک}_{۱۰} \frac{\text{۱ + مم ط مس ک}}{\text{۱ ـ مس ط مس ک}}$$

$$= \text{لوک}_{۱۰} \left[\frac{\text{۱ + ک مم ط}}{\text{۱ ـ ک مس ط}} \right]$$

$$= \text{لوک}_{۱۰} \left[\text{(۱ + ک مم ط)(۱ + ک مس ط + ک}^{۲}\text{ مس}^{۲}\text{ ط + ...)} \right]$$

$$= \text{لوک}_{۱۰} \left[\text{۱} + \frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^{۲}}{\text{جم}^{۲}\text{ ط}} + \text{......} \right]$$

$$= \text{مب} \left[\frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^{۲}}{\text{جم}^{۲}\text{ ط}} - \frac{۱}{۲} \frac{\text{ک}^{۲}}{\text{جب}^{۲}\text{ ط جم}^{۲}\text{ ط}} + \text{.....} \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

$$= \frac{\text{مب ک}}{\text{جب ط جم ط}} - \text{۲ مب ک}^{۲} \frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب}^{۲}\text{ ۲ ط}} + \text{.....}$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ
= ک مم ۲ ط اور یہ چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ

زاویہ ط، صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے

$$ل\ مس\ (ط + ک) - ل\ مس\ ط = \frac{۲\ مب}{جب\ ۲ط} \times ک$$

یعنی اصول بالعموم قائم رہیگا۔

متذکرہ بالا دونوں مستثنٰے صورتوں میں $\frac{ک}{جب\ ۲ط}$ چھوٹا نہیں ہوگا اسلئے فرق بے قاعدہ ہوں گے لیکن خفیف نہیں ہوں گے۔

یہی الفاظ مماس التمام کے لوکارتموں کی جدولوں کیلئے بھی درست ہوں گے

۱۴۳۔ لوکارتمی قاطع اور قاطع التمام کی جدولوں کے متعلق۔

اس صورت میں

$$ل\ قط\ (ط + ک) - ل\ قط\ ط = ل\ جم\ ط - ل\ جم\ (ط + ک)$$

اور $$ل\ قم\ (ط + ک) - ل\ قم\ ط = ل\ جب\ ط - ل\ جب\ (ط + ک)$$

اس لئے ل جب ط اور ل جم ط کے نتائج بالترتیب ل قم ط اور ل قط ط پر بھی صادق آئینگے۔

باب یازدہم

اغلاطِ مشاہدہ

۱۴۴ ـ اب تک ہم یہ تسلیم کرتے رہے ہیں کہ کسی زاویہ کا مشاہدہ پوری پوری صحت کے ساتھ ہر صورت میں ممکن ہے لیکن فی الحقیقت ایسا نہیں ہوتا۔ ہمارے مشاہدات دو قسم کی اغلاط کے مورد ہو سکتے ہیں اولاً وہ جو کہ آلات کی نادرستی کی وجہ سے وقوع میں آتی ہیں کیونکہ ہمارے آلات شاذ و نادر ہی مکمل طور پر صحیح ہوتے ہیں اور ثانیاً وہ جو سوال کے عمل کے دوران میں واقع ہوتی ہیں۔

۱۴۵ ـ اگر ہمارے مشاہدات میں کوئی غلطی ہو تو ظاہر ہے کہ بالعموم وہ مقدار بھی جو مشاہدات مذکورہ کی بناء پر محسوب کی گئی ہے غلط ہوگی مثلاً اگر حصہ اول دفعہ ۱۹۸ میں ء کی پیمائش میں کوئی خفیف سی غلطی وقوع میں آئی ہو تو اس سے لا کی قیمت میں بھی جس کا انحصار صریحاً اُس دفعہ کے نتیجہ کے بموجب ء پر ہے غلطی رونما ہوگی۔

۱۴۶ ـ کسی طول کی پیمائش میں غلطی کا قابل لحاظ ہونا بالعموم اُس نسبت پر منحصر ہوتا ہے جو غلطی کو طول مذکور کے ساتھ ہو مثلاً لکڑی کے ایک ٹکڑے کو ناپنے میں جس کا طول قریباً ۶ فٹ ہو ایک انچ کی غلطی نہایت وقیع اور قابل لحاظ سمجھی جائے گی۔ لیکن گھڑ دوڑ کے ایک میل لمبے راستے کی

پیمائش میں ایک انچ کی غلطی کو کوئی وقعت نہیں دی جاسکتی، اور زمین سے
چاند کا فاصلہ ناپنے میں تو ایک انچ کی غلطی بالکل ناقابل لحاظ ہوگی۔

۱۴۷۔ ہم یہاں فرض کرلیں گے کہ وہ غلطیاں جن پر ہم بحث کرینگے اتنی چھوٹی ہیں کہ اُن کے مربعوں کو (جن کو نیم قطری زاویوں میں ناپنا چاہیئے اگر مقادیر مذکورہ زاوئے ہوں) نظرانداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم یہاں اُن مقادیر میں غلطی معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کرتے ہیں جو غلط مقادیر کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئی ہوں۔

ہم یہاں تسلیم کرلیں گے کہ ہماری جدولیں اور عمل دونوں درست ہیں یعنی ہم عمل کی غلطیوں کو معرض بحث میں نہیں لائیں گے بلکہ صرف ابتدائی مشاہدہ کی اغلاط پر اکتفا کرینگے۔

۱۴۸۔ **مشق ۱**۔ م ع ایک عمودی لاٹھ ہے۔ (حصہ اول دفعہ ۷۴ کی شکل ملاحظہ ہو) ایک نقطہ و سے جس کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے و ہے لاٹھ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع، طہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور لاٹھ کی بلندی اس پیمائش کی بناء پر محسوب کی گئی ہے۔ اگر طہ کے مشاہدہ کرنے میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو معلوم کرو کہ لاٹھ کی محصلہ بلندی پر اس غلطی سے کیا اثر پڑے گا۔

صریحًا محسوبہ بلندی ف = ا مس طہ

اگر مشاہدہ شدہ زاویہ طہ اصلی زاویہ سے بقدر لہ کے زیادہ ہو تو

اصلی زاویہ ارتفاع = طہ ـ لہ اس لئے

اصلی بلندی = فَ = ا مس (طہ ـ لہ)

اس لئے بلندی کی غلطی = ف ـ فَ = ا مس طہ ـ و مس (طہ ـ لہ)

$$= ا \left\{ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{جب(طہ − لہ)}}{\text{جم (طہ − لہ)}} \right\}$$

$$= ا \frac{\text{جب لہ}}{\text{جم طہ جم (طہ − لہ)}}$$

اگر ہم لہ کے مربع اور نیز لہ کی بڑی قوتوں کو نظرانداز کر دیں تو یہ

$$= ا \text{ قط}^2 \text{ طہ} \times \text{لہ}$$

لہٰذا غلطی کو محسوبہ بلندی کے ساتھ نسبت

$$\text{لہ قط}^2 \text{طہ} \div \text{مس طہ} = \frac{\text{۲ لہ}}{\text{جب ۲ طہ}} \text{ ہے}$$

چونکہ لہ بہت چھوٹا ہے اس لئے اگر جب ۲ طہ بھی چھوٹا نہ ہو تو یہ نسبت صریحاً بہت چھوٹی ہوگی ۔ اور اس کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہوگی جبکہ جب طہ بڑا سے بڑا ہو یعنی ۲ طہ، $\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہو یعنی طہ = $\frac{\pi}{4}$ لیکن یہ نسبت بڑی ہوگی اگر طہ، صفر کے یا $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہو ۔

پس معلوم ہوا کہ اگر وہ زاویہ جو لاٹھ کے محاذی بنتا ہے صفر کے قریب ہو یا اگر زاویہ مذکورہ $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہو تو اس کی پیمائش میں خفیف سی غلطی بھی جواب میں نسبتاً بہت بڑی غلطی پیدا کرے گی ۔

اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو محصلہ بلندی یعنی ا مس طہ اور متعلق غلطی یعنی ا قط² طہ × لہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی لیکن موخرالذکر، اول الذکر کے مقابلہ میں نسبتاً بڑی ہوگی ۔

اگر طہ، ۹۰° کے قریب ہو تو ہر دو مقادیر بڑی ہونگی ۔

مشق ۲ ۔ دفعہ ۱۹۸ حصہ اول کی طرح ایک برج کی بلندی معلوم کی گئی ہے اگر اصلی زاویہ، زاویہ عہ سے جو پیمائش سے معلوم ہوا ہے بمقدار طہ کے کم ہو تو

بتاؤکہ ہمیں محصلہ بلندی میں کیا تبدیلی کرنی پڑے گی ۔

چونکہ عہ کی اصلی قیمت عہ - طہ ہے، اس لئے بلندی کی اصلی قیمت معلوم کرنے کے واسطے جواب میں عہ کی بجائے عہ - طہ لکھنا کافی ہو گا ۔

$$\text{اس لئے اصلی بلندی} = \text{ا}\,\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{طہ})\ \text{جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ} + \text{طہ})}$$

$$= \text{ا جب بہ}\,\frac{\text{جب عہ جم طہ} - \text{جم عہ جب طہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})\ \text{جم طہ} + \text{جم}\,(\text{بہ} - \text{عہ})\ \text{جب طہ}}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})} \times \frac{\text{ا} - \text{طہ مم عہ}}{\text{ا} + \text{طہ مم}\,(\text{بہ} - \text{عہ})} \quad \ldots\ldots\ \text{دفعات ۳۲ اور ۳۳}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})}\left[\text{ا} - \text{طہ مم عہ}\right]\left[\text{ا} - \text{طہ مم}\,(\text{بہ} - \text{عہ}) + \cdots\right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})}\left[\text{ا} - \text{طہ}\left\{\text{مم}\,(\text{بہ} - \text{عہ}) + \text{مم عہ}\right\}\right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})} - \text{طہ}\,\frac{\text{ا جب}^2\,\text{بہ}}{\text{جب}^2\,(\text{بہ} - \text{عہ})}$$

اس لئے محصلہ بلندی اصلی بلندی سے بقدر طہ $\frac{\text{ا جب}^2\,\text{بہ}}{\text{جب}^2\,(\text{بہ} - \text{عہ})}$ کے زیادہ ہے ۔

نیز غلطی کو محسوبہ بلندی کے ساتھ نسبت

$$\frac{\text{طہ جب بہ}}{\text{جب عہ جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})} \text{ ہے ۔}$$

مشق ۳۴ — ایک مثلث کے اضلاع اَ = ۲ ، بَ = ۳ اور جَ = ۴ سے

مثلث کے زاویے محسوب کئے گئے ہیں۔ اگر یہ معلوم ہو جائے کہ ج کا
اصلی طول پیمودہ طول سے بقدر ایک چھوٹی مقدار لہ کے کم ہے تو
دریافت کرو کہ پیمائش کی اس غلطی کی بناء پر محصلہ زاویوں کی قیمتوں میں
کیا غلطی واقع ہوئی ہے۔

اضلاع کی مندرجہ بالا قیمتوں سے زوایا کی مثلثی نسبتیں حسب ذیل حاصل
ہوتی ہیں۔

$$\text{جم ا} = \frac{۷}{۸} \qquad \text{جم ب} = \frac{۱۱}{۱۶} \qquad \text{جم ج} = -\frac{۱}{۴}$$

$$\text{جب ا} = \frac{۲\sqrt{۱۵}}{۱۶} \qquad \text{جب ب} = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۱۶} \qquad \text{جب ج} = \frac{۴\sqrt{۱۵}}{۱۶}$$

فرض کرو کہ ج کی قیمت ۴ − لہ کے جواب میں مثلث کے زاویوں کی قیمتیں
ا − طا، ب − طب اور ج − طج ہیں ۔ تب

$$\text{جم}(\text{ا} - \text{طا}) = \frac{۳^۲ + (۴ - \text{لہ})^۲ - ۲^۲}{۲ \times (۴ - \text{لہ}) \times ۳} = \frac{۲۱ - ۸\,\text{لہ}}{۲۴}\left(۱ - \frac{\text{لہ}}{۴}\right)^{-۱}$$

$$\therefore \text{جم ا} + \text{جب ا} \times \text{طا} = \frac{۱}{۲۴}\left[۲۱ - ۸\,\text{لہ}\right]\left[۱ + \frac{\text{لہ}}{۴}\right] = \frac{۱}{۲۴}\left[۲۱ - \frac{۱۱}{۴}\,\text{لہ}\right]$$

[دفعات ۳۲ اور ۳۳]

$$\text{یعنی } \frac{۷}{۸} + \frac{۲\sqrt{۱۵}}{۱۶}\,\text{طا} = \frac{۷}{۸} - \frac{۱۱}{۹۶}\,\text{لہ}$$

$$\text{اس لئے طا} = -\frac{۱۱\sqrt{۱۵}}{۱۸۰}\,\text{لہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{نیز جم}(\text{ب} - \text{طب}) = \frac{۲^۲ + (۴ - \text{لہ})^۲ - ۳^۲}{۲ \times (۴ - \text{لہ})\,۲} = \frac{۱۱ - ۸\,\text{لہ}}{۱۶}\left(۱ - \frac{\text{لہ}}{۴}\right)^{-۱}$$

$$\frac{۱۱}{۱۶} + \text{جب ب} \times \text{طب} = \frac{۱}{۱۶}\left[۱۱ - ۸\,\text{لہ}\right]\left[۱ + \frac{\text{لہ}}{۴}\right] = \frac{۱}{۱۶}\left[۱۱ - \frac{۲۱}{۴}\,\text{لہ}\right]$$

یعنی $\frac{3\sqrt{15}}{16}\,\text{ط}_{\text{م}} = -\frac{21}{64}\,\text{ل}$

اس لئے $\text{ط}_{\text{م}} = -\frac{7\sqrt{15}}{60}\,\text{ل}$ .... (۲)

نیز $\text{جم}(\text{ج} - \text{ط}_{\text{م}}) = \frac{2^2 + 3^2 - (4 - \text{ل})^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{-3 + 8\,\text{ل}}{12}$

یعنی $-\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{15}}{16}\,\text{ط}_{\text{م}} = -\frac{1}{4} + \frac{2\,\text{ل}}{3}$

اس لئے $\text{ط}_{\text{م}} = \frac{8\sqrt{15}}{45}\,\text{ل}$

لہٰذا زاویوں ا، ب، ج میں اغلاط بالترتیب

$-\frac{11\sqrt{15}}{180}\,\text{ل}$، $-\frac{21\sqrt{15}}{180}\,\text{ل}$ اور $\frac{32\sqrt{15}}{180}\,\text{ل}$

نیم قطریوں کی ہیں

یعنی سب سے کم غلطی سب سے چھوٹے زاوئے میں ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ہر سہ زوایا کی غلطیوں کا مجموعہ صفر ہے اور ہونا بھی یہی چاہیئے کیونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے۔ تیسرے زاویہ کی غلطی ہم اس اصول کی بناء پر بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

امثلہ ۲۲

ا – ایک ٹیلہ کے اوپر ایک مینار ہے جسکی بلندی ب ہے۔ مینار کی چوٹی اور قاعدہ کے ارتفاعی زاوئے بالترتیب عہ اور بہ مشاہدہ کئے گئے ہیں اور اس بناء پر ٹیلہ کی بلندی محسوب کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ عہ کی پیمائش میں طہ کی غلطی واقع ہونے سے ٹیلہ کی اصلی بلندی ف میں جو غلطی رونما ہوگی وہ محصلہ بلندی کا

ط × جم بہ قط عہ تم (عہ ـ بہ) گنا ہوگی۔

۲ ۔ ایک نقطہ سے جو مینار کے قاعدہ سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے ۔ اگر زاویہ ارتفاع کی پیمائش میں ۱′ کی غلطی واقع ہوئی ہو اور طول کی پیمائش میں ۶ انچ کی، تو بتاؤ کہ محصلہ بلندی میں چھوٹی سے چھوٹی اور بڑی سے بڑی غلطیاں کیا پیدا ہوسکتی ہیں۔

۳ ۔ اگر حصہ اول دفعہ ۲۰۲ کی مشق میں زاویہ عہ کی پیمائش میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اس سے مینار اور جھنڈے کی محصلہ بلندیوں میں کیا غلطیاں رونما ہونگی ۔ اگر ا = ۱۰۰۰ فٹ، عہ = ۳۰° اور بہ = ۱۵° اور عہ کی قیمت میں ۱′ کی غلطی ہو تو مطلوبہ غلطیوں کی عددی قیمتیں معلوم کرو ۔

۴ ۔ ا ب ایک عمودی لاٹھ ہے اور ج د ایک ایسا افقی خط ہے کہ ج د ممدودہ لاٹھ کے قاعدہ ب میں سے گزرتا ہے، لاٹھ کے محاذی ج اور د پر جو زاویے بنتے ہیں اُن کے مماس بالترتیب ۵/۱۲ اور ۳/۴ ہیں۔ اگر ج د کا طول ۳۰ فٹ معلوم ہو تو لاٹھ کی بلندی معلوم کرو ۔

نیز ثابت کرو کہ اگر د پر کے زاویۂ ارتفاع کے مشاہدہ میں ۱′ کی غلطی واقع ہو تو اس سے لاٹھ کی محصلہ بلندی میں قریباً ایک انچ کی غلطی رونما ہوگی۔

۵ ۔ ایک مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک مقام ا پر عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور ایک اور مقام ب پر جو مینار کے قاعدہ اور مقام ا کے ملانے والے افقی خط پر واقع ہے اور جس کا فاصلہ ا سے ج ہے زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے اس طرح سے مینار کی بلندی

$$\frac{\text{ج جب عہ جب بہ}}{\text{جب (عہ ـ بہ)}}$$

فٹ محسوب کی گئی ہے ۔

اگر ا ب، مینار کے قاعدہ اور ا کے ملانے والے خط پر نہ ناپا جائے بلکہ ایسی

...ست میں ناپا جائے جو متوازی الافق ہو اور موخرالذکر خط کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ
...د بنائے تو بتاؤ کہ مینار کی بلندی میں دوسرے مرتبہ کی چھوٹی مقادیر تک صحت کرنے
کے لئے محسوبہ بلندی میں سے مقدار $\frac{\text{ج جم ھ جب}^2 \text{ہ}}{\text{جم ہ جب (ھ - ہ)}} \times \frac{\text{ط}^2}{2}$ تفریق کرنی پڑیگی۔

۶ ـ تین نقاط ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور ایک اور نقطہ د
کا فاصلہ ب سے اس مشاہدہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ

$$\angle \text{ ادب } = \angle \text{ ب د ج } = \text{ط،}$$

ثابت کرو کہ اگر ط کے مشاہدہ میں ایک چھوٹی غلطی ل واقع ہو تو اس کی وجہ سے
دب کے محصلہ طول میں تقریباً

$$\frac{-2\,\text{اَ بَ (اَ + بَ)}^2 \text{ جب ط}}{(\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{اَ بَ جم ۲ط})^{\frac{3}{2}}}\ \text{ل}$$

کی غلطی واقع ہوگی جہاں اب = اَ اور ب ج = بَ

۷ ـ ایک مثلث کے تین اضلاع کی پیمائش کرتے وقت دو اضلاع اَ اور بَ
کے طولوں میں دو چھوٹی غلطیاں بالترتیب لا اور ما واقع ہوئیں، ثابت کرو کہ
زاویہ ج میں $-\frac{\text{ما}}{\text{بَ}}\text{مم ا} - \frac{\text{لا}}{\text{اَ}}\text{مم ب}$ کی غلطی واقع ہوگی، نیز بتاؤ کہ باقی
زاویوں میں کیا کیا غلطیاں واقع ہونگی۔

۸ ـ ایک مثلث اب ج میں ذیل کی تقریبی قیمتیں دی گئی ہیں

$$\text{اَ} = \text{۳۶ فٹ، بَ} = \text{۵۰ فٹ اور ج} = \text{مس}^{-1}\frac{3}{4}$$

معلوم کرو کہ اَ کی دی ہوئی قیمت میں کتنی غلطی جَ کی محسوبہ قیمت میں اتنی ہی غلطی
پیدا کریگی جو ج کی پیمائش میں ۵" کی غلطی سے پیدا ہوتی ہے

۹ ـ ایک مثلث ذیل کی قیمتوں کی بنا پر حل کیا گیا ہے

ج = ۱۵° ، اَ = ۳√۶ اور ب = ۲۔

ثابت کرو کہ ج کی قیمت میں ۱۰ً کی غلطی واقع ہونے سے ب کی محسوبہ
قیمت میں تقریباً ۶۶ء۱۳ً کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۰ـ ایک مثلث کا زاویہ ا اور دو اضلاع بَ اور جَ معلوم ہیں، اگر زاویہ
ا کی پیمائش میں ایک چھوٹی غلطی طہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بنا پر
۱) ب کی محصلہ قیمت میں ہ۔ طہ جب ب جب ج قم اُ نیم قطریوں کی غلطی واقع ہوگی۔
۲) اَ کی محصلہ قیمت میں جَ جب ب × طہ کی غلطی واقع ہوگی۔
۳) اور مثلث مذکور کے محصلہ رقبہ میں اس کے طہ مم ا گنا کی غلطی واقع ہوگی۔
۱ ـ ایک مثلث کے اضلاع اَ ، بَ اور جَ میں بالترتیب لا ، ما ، ی کی
غلطیاں ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان اغلاط کی بنا پر مثلث کے بیرونی دائرہ کا نصف
قطر محسوب کیا جائے تو اس میں

$$\frac{1}{۲}\ \text{مم ا مم ب مم ج}\ [\ \text{لا قط ا + ما قط ب + ی قط ج}\ ]$$

کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۱ ـ ایک مثلث کا رقبہ اس کے اضلاع کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، یہ
معلوم ہے کہ کسی طول کی پیمائش میں انتہائی غلطی جو اصل کو کم یا زیادہ کر سکتی ہے اصلی
طول کی ن گنی ہے جہاں ن بہت چھوٹا ہے، ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث
کے اضلاع حسب پیمائش ۱۱۰، ۸۱، ۵۹، گز ہوں اور اُن کی بنا پر مثلث
مذکور کا رقبہ محسوب کیا جائے تو اس رقبہ میں جس غلطی کے وقوع کا امکان ہے وہ
زیادہ سے زیادہ رقبہ محصلہ کی ۳۴۳ء۱۲ × ن گنی ہو سکتی ہے۔

۱۲ ـ پیمائش سے معلوم ہوا ہے کہ ایک مثلث کے تینوں اضلاع ایک دوسرے کے
تقریباً مساوی ہیں، اگر پیمائش میں غلطی کی یا بیشی کے لحاظ سے ایک فیصد ہو تو ثابت

رو کہ بڑی سے بڑی غلطی جو ایک زاویہ کے محسوب کرنے میں واقع ہوسکتی ہے تقریباً ۸ ہے۔

۱۴ ۔ ایک مستوی متساوی الاضلاع مثلث افقی سطح میں واقع ہے، مثلث کے ہر ایک کونے سے ایک پہاڑ کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ اگر ہر ایک زاویہ عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{ا مس عہ}$$

ہے جہاں ا متساوی الاضلاع مثلث کا ایک ضلع ہے اگر ج پر کے ارتفاعی زاویے کی پیمائش میں نَ کی غلطی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی اصلی بلندی

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{ا مس عہ}\left[۱+\frac{\text{جب نَ}}{\text{۲ جب عہ جم عہ}}\right]\ \text{ہے}$$

جو طالب علم احصائے تفرقات سے واقف ہے وہ فوراً دیکھ سکتا ہے کہ باب ہذا کی بعض مثالیں محض تفرق کرنے سے زیادہ آسانی سے حل ہوسکتی ہیں

مثلاً دفعہ ۱۴۸ کی مشق ۲ میں مینار کی بلندی لا

$$=\frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ − عہ)}}$$

اگر بہ مستقل ہو اور عہ بدلے تو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرعہ}}=\text{ا جب بہ}\ \frac{\text{جم عہ جب (بہ − عہ) + جب عہ جم (بہ − عہ)}}{\text{جب}^{۲}\ \text{(بہ − عہ)}}$$

$$\therefore\ \text{سف لا}=\frac{\text{ا جب}^{۲}\ \text{بہ}}{\text{جب}^{۲}\ \text{(بہ − عہ)}}\ \text{سف عہ}$$

جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ عہ میں خفیف تبدیلی سف عہ واقع ہونے سے لا میں

ایک خفیف تبدیلی معف لا پیدا ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اشلہ ۲۲ مشق ۶ میں

جم ج = (اَ² + بَ² − جَ²) ⁄ ۲ اَ بَ

لیکن چونکہ جَ مستقل ہے اسلئے تفرق کرنے سے

− جب ج معف ج = {۲ اَ معف اَ + ۲ بَ معف بَ × اَ بَ − (اَ² + بَ² − جَ²)(اَ معف بَ + بَ معف اَ)} ⁄ ۲ اَ² بَ²

= {بَ × ۲ اَ جَ جم ب × معف اَ + اَ × ۲ بَ جَ جم ا × معف بَ} ⁄ ۲ اَ² بَ²

∴ معف ج = − معف اَ (جَ جم ب ⁄ اَ بَ جب ج) − معف بَ (جَ جم ا ⁄ اَ بَ جب ج)

= − (معف اَ ⁄ اَ) مم ب − (معف بَ ⁄ بَ) مم ا

باب دوازدہم

متفرق مسائل

مساوات درجہ سوم کا حل

۱۴۹ — مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل یہ ہے

$ما^{۳} + ۳ ا ما^{۲} + ۳ ب ما + ج = ۰$

اس میں ما کی بجائے لا − ا رکھنے سے یہ مساوات

$لا^{۳} - ۳ (ا^{۲} - ب) لا + (۲ ا^{۳} - ۳ ا ب + ج) = ۰$ ہو جاتی ہے،

یعنی ہو جاتی ہے $لا^{۳} - ۳ ف لا + ق = ۰$ ...... (۱)

گویا ہم درجہ سوم کی کسی مساوات کو مساوات (۱) کی شکل میں یعنی ایسی شکل میں جس میں $لا^{۲}$ کی کوئی رقم نہ ہو تحویل کر سکتے ہیں۔

۱۵۰ — مساوات $لا^{۳} - ۳ ف لا + ق = ۰$ کا حل

اس میں $لا = \frac{ی}{ن}$ رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$ی^{۳} - ۳ ن^{۲} ف ی + ق ن^{۳} = ۰$ .... (۲)

اب دفعہ ۱۰۷ کی رو سے ہمیشہ

$جم ۳ طہ = ۴ جم^{۳} طہ - ۳ جم طہ$

اسلئے $جم^{۳} طہ - \frac{۳}{۴} جم طہ - \frac{۱}{۴} جم ۳ طہ = ۰$ .... (۳)

ظاہر ہے کہ مساوات (۲) اور (۳) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہیں

بشرطیکہ ی = جم ط، $۳ ف ن^۲ = \frac{۳}{۴}$ اور $-\frac{۱}{۴}$ جم ۳ط = $ق ن^۳$

اسلئے $ن = \left(\frac{۱}{۴ف}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

اور اسلئے $جم ۳ط = -۴ق\left(\frac{۱}{۴ف}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ ....(۴)

مساوات (۴) ہمیشہ (بشرط ضرورت جداول کی مدد سے) حل ہوسکتی ہے اگر ف مثبت ہو اور $۴ق\left(\frac{۱}{۴ف}\right)^{\frac{۳}{۲}} < ۱$

یعنی اگر $ق^۲ < ۴ف^۳$

[جو طالب علم نظریہ مساوات سے واقف ہے اس سے مخفی نہیں کہ یہ وہ صورت ہے جو کارڈن کے طریقہ سے حل نہیں ہوسکتی یعنی وہ صورت ہے جس میں کہ مساوات کی تینوں اصلیں حقیقی ہوں]

اگر چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو مساوات (۴) کو پورا کرے ط ہو تو مقادیر $ط + \frac{۲π}{۳}$ اور $ط + \frac{۴π}{۳}$ بھی مساوات مذکورہ کو پورا کرینگی گویا مساوات

$$لا^۳ - ۳ف لا + ق = ۰$$

کی اصلیں $\frac{۱}{ن}$ جم ط، $\frac{۱}{ن}$ جم $\left(ط + \frac{۲π}{۳}\right)$ اور $\frac{۱}{ن}$ جم $\left(ط + \frac{۴π}{۳}\right)$

یعنی $۲\sqrt{ف}$ جم ط، $۲\sqrt{ف}$ جم $\left(ط + \frac{۲π}{۳}\right)$ اور $۲\sqrt{ف}$ جم $\left(ط + \frac{۴π}{۳}\right)$ ہونگی۔

۱۵۱ - مشق - مساوات $لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۹ لا + ۳ = ۰$ کو حل کرو۔

لا = ما − ۲ رکھنے سے مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$ما^۳ - ۳ ما + ۱ = ۰$$

اب اگر $ما = \frac{ی}{ن}$ رکھا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$ی^۳ - ۳ ن^۲ ی + ن^۳ = ۰ \quad ....(۱)$$

اور جم^3 ط − $\frac{۳}{۴}$ جم ط − $\frac{۱}{۴}$ جم ۳ ط = ۰ ....(۲)

(۱) اور (۲) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہونگی اگر

ی = جم ط، ن^2 = $\frac{۱}{۴}$ اور − $\frac{۱}{۴}$ جم ۳ ط = ن^3

یعنی اگر ن = $\frac{۱}{۲}$

اور جم ۳ ط = − $\frac{۱}{۲}$ = جم ۱۲۰° ....(۳)

مساوات (۳) کی اصلیں صریحاً حسب ذیل ہیں

۴۰°، ۱۲۰° + ۴۰°، ۲۴۰° + ۴۰°

اسلئے ی = جم ۴۰° یا جم ۱۶۰° یا جم ۲۸۰°

∴ ا = ۲ جم ۴۰°، یا ۲ جم ۱۶۰° یا ۲ جم ۲۸۰°

∴ لا = ا − ۲ = −۲ + ۲ جم ۴۰° یا −۲ − ۲ جم ۲۰° یا −۲ + ۲ جم ۸۰°

لا کی عددی قیمتیں جدولوں کے ذریعہ معلوم ہوسکتی ہیں۔

امثلہ ۲۳

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) ۲ لا^3 − ۳ لا − ۱ = ۰ (۲) لا^3 + ۳ لا^2 − ۱ = ۰

(۳) لا^3 − ۲۴ لا − ۳۲ = ۰ (۴) لا^3 − ۶ لا^2 + ۶ لا + ۸ = ۰

(۵) لا^3 − ۲۱ لا + ۷ = ۰ (۶) لا^3 + ۳ لا^2 + ۲ لا − ۱ = ۰

(۷) لا^3 − ۷ لا + ۵ = ۰

اعظم اور اقل قیمتیں

۱۵۲ — ایک مثلثی جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرنے کی ایک مثال

حصّہ اول دفعہ ۱۳۹ میں درج کی گئی ہے - اس جگہ ہم ایک اور مثال حل کرتے ہیں -

اگر دو مثبت زاویے لا اور ما ایسے ہوں کہ اُن کا حاصل جمع ایک مستقل زاویہ عہ (۲ ∠) کے برابر ہو تو بتاؤ کہ جب لا جب ما کی بڑی سے بڑی قیمت کب ہوگی، نیز یہ مسئلہ دو سے زیادہ زاویوں کی صورت میں کیا ہو جائے گا -

ظاہر ہے کہ ۲ جب لا جب ما = ۲ جب لا جب (عہ - لا)

= جم (عہ - ۲ لا) - جم عہ

اسلیئے ۲ جب لا جب ما کی قیمت بڑی سے بڑی اسوقت ہوگی جب جم (عہ - ۲ لا) بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر عہ = ۲ لا

اس لیئے لا = ما = $\frac{\text{عہ}}{2}$

اس لئے حاصل ضرب مذکورہ بڑے سے بڑا اُسوقت ہوگا جب زاویے لا اور ما باہم مساوی ہوں -

اب فرض کرو کہ تین زاویئے لا، ما، ی ایسے ہیں کہ اُن کا مجموعہ ایک مستقل زاویہ یہ (∠ = ۲) کے مساوی ہے - اگر حاصل ضرب

جب لا جب ما جب ی

کے زاویوں میں سے کوئی دو زاویے مثلاً لا اور ما باہم مساوی نہ ہوں تو ظاہر ہے کہ اگر ہم لا اور ما دونوں کی بجائے اُن کے حاصل جمع کا نصف لکھیں تو زاویوں کے حاصل جمع میں تو کوئی فرق نہ آئیگا لیکن حاصل ضرب مذکورہ کی قیمت بڑھ جائے گی - اس لئے جب تک زاویے لا، ما اور ی آپس میں برابر نہ ہو جائیں ہم ہمیشہ زاویوں کو بتدریج ایک دوسرے کے مساوی کرنے سے حاصل ضرب مذکور کی قیمت بڑھا سکتے ہیں - پس بڑی سے بڑی قیمت

اس وقت حاصل ہوگی جب لا، ما اور ی آپس میں برابر ہونگے۔

زوایا لا، ما اور ی ...... کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو صریحاً اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

۱۵۳ — اب ہم بتا سکتے ہیں کہ بڑے سے بڑے رقبہ کا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے مثلث متساوی الاضلاع ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو حصہ اول، اشلہ ۲۳۶ مشق ۱۰ کے بموجب مثلث کا رقبہ

= ۲ ر^۲ جب ا جب ب جب ج

ہوگا جہاں ا + ب + ج = ۲ ق = ایک مستقل زاویہ

دفعہ ماقبل کی رو سے ظاہر ہے کہ یہ مثلث بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا

جب ا = ب = ج

۱۵۴ — **مشق**۔ مقدار ا^۲ مس لا + ب^۲ مم لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا^۲ مس لا + ب^۲ مم لا = ما

یعنی ا^۲ مس^۲ لا − ما مس لا + ب^۲ = ۰

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

مس لا = (ما ± √(ما^۲ − ۴ ا^۲ ب^۲)) / ۲ ا^۲

چونکہ مس لا حقیقی ہے اسلئے علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے وہ مثبت ہونی چاہئے یعنی ضرور ہے کہ ما^۲ > ۴ ا^۲ ب^۲

اس لئے ما کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۲ ا ب ہے اور اس قیمت کے جواب میں مس لا کی قیمت ب/ا ہے۔

امثلہ ۴۲

۱۔ اگر لا + ما ایک دیا ہوا زاویہ ہو جو π سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب لا + جب ما (۲) جم لا جم ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

۲۔ اگر لا + ما = ایک دیا ہوا زاویہ < π/۲ ' تو ثابت کرو کہ

جم لا + جم ما اور جم^۲ لا + جم^۲ ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

مندرجہ ذیل رقوم کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ $\frac{۲ \text{ جم ط}}{\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۳}}{۲ \text{ جم ط}}$ ۴۔ ا قط ط ۔ ب مس ط

۵۔ $\frac{\text{قم}^۲ \text{ ط} - \text{مم ط}}{\text{قم}^۲ \text{ ط} + \text{مم ط}}$ ۶۔ ا^۲ جب^۲ ط + ب^۲ قم^۲ ط

۷۔ ا^۲ قط^۲ ط + ب^۲ قم^۲ ط

اگر لا + ما کی قیمت ہمیشہ ایک دیئے ہوئے زاویہ ۲ عہ کے مساوی ہو جہاں ۲ عہ کم ہے π سے تو ذیل کے جملوں کی کم سے کم قیمتیں دریافت کرو

۸۔ مس لا + مس ما ۹۔ قط لا + قط ما

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{قط لا} + \text{قط ما} = \text{جم عہ} \left[\frac{۱}{\text{جم(عہ-لا)} - \text{جب عہ}} + \frac{۱}{\text{جم(عہ-لا)} + \text{جب عہ}} \right]$$

۱۰۔ اگر لا + ما = عہ جہاں عہ < π/۲ ' تو معلوم کرو کہ مس لا مس

[illegible] بڑی سے بڑی کب ہوگی۔

[۱ - مس لا مس ما = ۲ جم ھ ÷ (جم ھ + جم (ھ - ۲ لا))]

۱۱ - ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا مثلث جسکے اضلاع کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار کے برابر ہو مساوی الاضلاع ہوتا ہے۔
[ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ایک مثلث کا رقبہ = ن۲ مس ا/۲ مس ب/۲ مس ج/۲] جہاں ن = نصف محیط

۱۲ - اگر لا، ما، ی ..... ایسے زاویے ہوں جنکا حاصل جمع ایک دیے ہوئے زاویہ کے مساوی ہو اور نیز ان زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ مثبت ہو اور زاویہ قائمہ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب جم لا جم ما جم ی ... کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب سب زاویے باہم مساوی ہوں۔

۱۳ - اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مقادیر جب ا + جب ب + جب ج اور جب ا جب ب جب ج کی قیمتیں بڑی سے بڑی اسوقت ہونگی جب مثلث مساوی الاضلاع ہو۔

۱۴ - ایک حادہ الزوایا مثلث کا مثلث پائین کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث پائین کا رقبہ اول الذکر مثلث کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔

۱۵ - ا ب ج ایک مثلث ہے، ثابت کرو کہ مقدار

جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ ج

کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت - ۳/۲ ہے، نیز ثابت کرو کہ جم ا + جم ب + جم ج ہمیشہ ایک سے بڑا ہوگا اور ۳/۲ سے بڑا نہیں ہوگا۔

۱۶ - اگر ا ب ج ایک مثلث ہو تو ثابت کرو کہ ہر دو مقادیر

مم ا + مم ب + مم ج

اور مم^۲ ا + مم^۲ ب + مم^۲ ج

کی قیمتیں چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہونگی جبکہ مثلث مذکور مساوی الاضلاع ہو۔

مقادیرِ ملتف کی ہندسی تعبیر

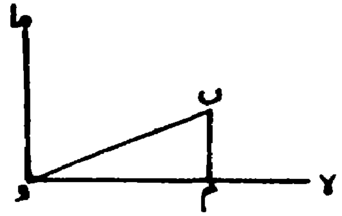
۱۵۵ — حصہ اول باب چہارم میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر کوئی فاصلہ کسی خاص سمت میں (مثلاً افق کے متوازی دائیں جانب) ناپا جائے اور اس فاصلہ کو ا سے تعبیر کیا جائے تو اتنا ہی فاصلہ جو اول الذکر سمت کی مقابل سمت میں (یعنی افق کے متوازی بائیں جانب) ناپا جائے گا وہ -ا ، سے تعبیر ہوگا۔

اس لئے ا کے ماقبل منفی علامت (-) ثبت کرنیکا وہی نتیجہ ہوتا ہے گویا و ا (ملاحظہ ہو حصہ اول دفعہ ۵۳ کی شکل) کو مثبت سمت میں دو قائموں میں سے گھما دیا گیا ہے گویا ا پر (-۱) کا عمل عائد کرنے کے یہ معنی ہیں کہ ا کو دو قائموں میں سے مثبت سمت میں گھمایا گیا ہے۔

۱۵۶ — اب $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ ، اس لئے عمل $\sqrt{-1}$ کے لئے جو معنی بھی تجویز کئے جائیں وہ ایسے ہونے چاہئیں کہ کسی مقدار پر یہ عمل دو دفعہ کرنے سے وہی نتیجہ مترتب ہو جو اسی مقدار پر -۱ ، کا عمل ایک دفعہ کرنے سے مترتب ہوتا ہے۔

پس ہم عمل $\sqrt{-1}$ سے یہ مراد لے سکتے ہیں کہ یہ کسی طول کو ایک زاویہ قائمہ میں سے (بسمت مثبت) گھما دیتا ہے۔ اسلئے کسی طول ا پر $\sqrt{-1}$ کا عمل کرنے کے یہ معنی ہونگے کہ اس طول ا کو بسمت مثبت دو قائموں میں سے گھمایا گیا ہے۔ لہٰذا ان معنوں کے مطابق $\sqrt{-1}$ ا سے ایک خط

جو اس خط پر عمود ہے جو ۱ سے تعبیر ہوتا ہے۔



۱۵۷ - اب ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ مقدار $لا + \sqrt{-۱}\ ما$ سے کیا مراد ہے
دو خط ولا اور وما کھینچو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں، ولا پر ایک فاصلہ وم = لا ناپو، م سے م ن، وما کے متوازی کھینچو اور اس کو ما کے مساوی بناؤ۔ تب م ن، $\sqrt{-۱}\ ما$ کو تعبیر کرتا ہے، پس مقدار $لا + \sqrt{-۱}\ ما$ گویا نقطہ ن سے تعبیر ہوتی ہے۔
یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ خط و ن اس ملتف مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔

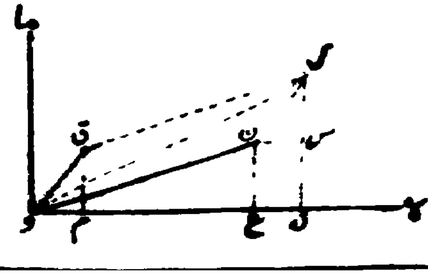
ظاہر ہے کہ $و ن = \sqrt{وم^{۲} + م ن^{۲}} = \sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$

اور $\angle م و ن = مس^{-۱} \frac{م ن}{و م} = مس^{-۱} \frac{ما}{لا}$

لہٰذا طول و ن، مقدار لا + خ ما کے مقیاس کو تعبیر کرتا ہے اور زاویہ م و ن مقدار مذکور کے اہتزاز کی قیمت خاص کو (دفعہ ۱۸) تعبیر کرتا ہے۔

۱۵۸ - دو ملتف مقداروں کو جمع کرنا

فرض کرو کہ و ن مقدار لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے اور و ق ای + خ ے کو یعنی و ع = لا، ع ن = ما،
وم = ی اور م ق = ے
متوازی الاضلاع و ن ر ق



کی تکمیل کرو، ولا پر عمود ں ال اور ں ال پر عمود ن س کھینچو۔
چونکہ ن ں، وق کے مساوی اور متوازی ہے
اس لئے ع ل = ن س = وم اور س ں = م ق
لہذا و ل = وع + ع ل = لا + ی
اور ل ں = ل س + س ں = ما + سے
اسلئے و ں، مقدار ملتف

(لا + ی + خ (ما + سے) کو تعبیر کرتا ہے۔

اسلئے دو ملتف مقداروں کا مجموعہ اُس متوازی الاضلاع کے قطر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو متصل اضلاع مذکورہ مقادیر کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۵۹- فرض کرو کہ لا + خ ما = ر (جم طہ + خ جب طہ) بموجب دفعہ ۱۸

تب (جم عہ + خ جب عہ) (لا + خ ما)

= ر (جم عہ + خ جب عہ) (جم طہ + خ جب طہ)

= ر [جم (عہ + طہ) + خ جب (عہ + طہ)] ....(۱)

اب ان معنوں کے بموجب جو ملتف مقادیر کے لئے اوپر تجویز کئے جاچکے ہیں

ر [جم طہ + خ جب طہ]

سے مراد ایک ایسا خط ہے جس کا طول ر ہے اور جو ولا سے زاویہ طہ بناتا ہے

نیز حسب ر [جم (عہ + طہ) + خ جب (عہ + طہ)]

سے مراد ر طول کا ایک خط ہے جو ولا سے زاویہ عہ + طہ، بناتا ہے (دفعہ ۱۵۷)
اسلئے مساوات (۱) کی رو سے لا + خ ما کو جم عہ + خ جب عہ سے

ضرب دینے کے گویا یہ معنی ہیں کہ اس خط کو جو لا + خ ما سے تعبیر ہوتا ہے ایک زاویہ م میں سے گھما دیا گیا ہے۔

۱۶۰ ۔ ڈی مائیور کے مسئلہ کی ہندسی تعبیر

مقدار (جم عہ + خ جب عہ)(جم بہ + خ جب بہ)(جم جہ + خ جب جہ)(جم لہ + خ جب لہ) سے یہ مراد ہے کہ ایک خط کو جو جم لہ + خ جب لہ سے تعبیر ہو پہلے زاویہ جہ، پھر زاویہ بہ اور بالآخر زاویہ عہ میں سے گھمایا گیا ہے۔ یعنی فی الجملہ زاویہ عہ + بہ + جہ میں سے گھمایا گیا ہے۔ لیکن اس موخر الذکر مجموعی عمل سے جو خط حاصل ہوگا وہ وہی ہوگا جو

[جم (عہ + بہ + جہ) + خ جب (عہ + بہ + جہ)] (جم لہ + خ جب لہ)

سے تعبیر ہوتا ہے۔

یہی استدلال زوایا کی کسی تعداد پر صادق آئیگا۔ اسلئے ڈی مائیور کا مسئلہ جبریہ طرز میں محض اس ہندسی امر واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ ایک خط کو یکے بعد دیگرے مختلف زاویوں میں سے گردش دینے سے وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو اس خط کو ایک دم اُن زاویوں کے مجموعہ میں سے گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق - بآسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ عدد ۱ کے تین جذر الکعب حسب ذیل ہیں

جم ۰ + خ جب ۰ ، جم ۲π/۳ + خ جب ۲π/۳ ، جم ۴π/۳ + خ جب ۴π/۳ اسلئے

(جم ۰ + خ جب ۰)(جم ۰ + خ جب ۰)(جم ۰ + خ جب ۰) = ۱

(جم ۲π/۳ + خ جب ۲π/۳)(جم ۲π/۳ + خ جب ۲π/۳)(جم ۲π/۳ + خ جب ۲π/۳):

اور جم (۴ط/۳ + خ جب ۴ط/۳) (جم ۴ط/۳ + خ جب ۴ط/۳) (جم ۴ط/۳ + خ جب ۴ط/۳) = ۱

ان مساواتوں میں سے پہلی مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو تین بار صفر زاویہ میں سے گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔

دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ ۲ط/۳ میں سے (یعنی فی الجملہ زاویہ ۲ ط میں سے) گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔

تیسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ ۴ط/۳ میں سے (یعنی فی الجملہ ۴ ط میں سے) گردش دینے سے وہی ابتدائی خط حاصل ہوتا ہے۔

یہ سب امور صریحاً درست ہیں۔

۱۶۱۔ دو ملتف مقداروں کو ضرب دینا

اگر لا + خ ما = ر (جم طہ + خ جب طہ)

اور ی + خ ے = ر٫ (جم فہ + خ جب فہ)

تو (لا + خ ما) (ی + خ ے) = ر ر٫ (جم طہ + خ جب طہ) (جم فہ + خ جب فہ)۔

= ر ر٫ [جم (طہ + فہ) + خ جب (طہ + فہ)]

پس ایک ملتف مقدار لا + خ ما کو دوسری ملتف مقدار ی + خ ے سے ضرب دینے کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اُس خط کو جو لا + خ ما سے تعبیر ہوتا ہے زاویہ فہ

[یعنی مس^-۱ ے/ی]

میں سے گھمایا گیا ہے اور اس کے طول کو نسبت

$$۱ : ر \quad یعنی \quad ۱ : \sqrt{ی^{۲} + سے^{۲}}$$

سے بڑھا گیا ہے، اسلئے ایک ملتف مقدار کو دوسری ملتف مقدار سے ضرب دینے سے مراد گویا "گردش دینا اور کھینچنا" ہے ۔

متفرق مثالیں ۲۵

۱ ۔ ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ک لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لا متناہی ہے

۲ ۔ اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے تین زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ مقدار

$$۱ - ۸ \; جم \, ا \; جم \, ب \; جم \, ج$$

ہمیشہ مثبت ہوگی

۳ ۔ اگر ا کے خیالی جذر الکعب ع اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ع \, و^{ن} - ب \, و^{۲ن} = - \, و^{-\frac{ن}{۲}} \left[\frac{\sqrt{۳}}{۲} \, جب \, \frac{\sqrt{۳}\, ن}{۲} + جم \, \frac{\sqrt{۳}\, ن}{۲} \right]$$

۴ ۔ اگر لا ایک نیم قطری سے کم ہو تو ثابت کرو کہ $لا = ۲ \sqrt{\frac{۳ - ۳ \, جم \, لا}{۵ + جم \, لا}}$ تقریباً

اور دائیں جانب کے رکن میں غلطی تقریباً $\frac{لا^{۵}}{۱۸۰}$ نیم قطری زاویوں کی ہے ۔

۵ ۔ اگر جم (ط + خ ف) = قط (ع + خ ب) جہاں ع، ب، ط اور ف سب حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مس^{۲} \, ف \; جمز^{۲} \, ب = جب^{۲} \, ع$$

$$اور \quad مس^{۲} \, ب \; جمز^{۲} \, ف = جب^{۲} \, ط$$

۶ ۔ اگر لا = ۲ جم ع جمز ب اور ما = ۲ جب ع جبز ب تو ثابت کرو کہ

$$قط \, (ع + خ \, ب) + قط \, (ع - خ \, ب) = \frac{۴ \, لا}{لا^{۲} + ما^{۲}}$$

$$قط \, (ع + خ \, ب) - قط \, (ع - خ \, ب) = \frac{۴ \, خ \, ما}{لا^{۲} + ما^{۲}}$$

۷ — ثابت کرو کہ

جب^ن^ فہ جم ن فہ + ن جب^ن-۱^ فہ جم (ن - ۱) طہ جب (طہ - فہ)

+ ن (ن - ۱) / ۲ جب^ن-۲^ فہ جم (ن - ۲) طہ جب^۲^ (طہ - فہ) + ... + جب^ن^ (طہ - فہ)

= جب^ن^ طہ جم ن فہ

۸ — ثابت کرو کہ مساوات

لا^ن^ جب ن طہ - ن لا^ن-۱^ جب (ن طہ + فہ)

+ ن (ن - ۱) / ۲ لا^ن-۲^ جب (ن طہ + ۲ فہ) - ...... تا (ن + ۱) رقوم = ۰

کی اصلیں مساوات لا = جب (طہ + فہ - ک π/ن) قم (طہ - ک π/ن)

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن سے مراد کوئی صحیح عدد ہے اور ک کی قیمت صفر سے ن - ۱ تک کوئی صحیح عدد ہے۔

۹ — ثابت کرو کہ سلسلۂ لا تناہی

جب طہ + ۱/۲ جب^۳^ طہ / ۳ + (۳ × ۱)/(۴ × ۲) جب^۵^ طہ / ۵ + ...

کی قیمت طہ کے مساوی ہے جہاں طہ کوئی حادہ زاویہ ہے، اور بالعموم اگر ن کا انتخاب اس طرح کیا جائے کہ مقدار ن π + (- ۱)^ن^ طہ کی قیمت - π/۲ اور + π/۲ کے درمیان ہو تو سلسلہ بالا کی قیمت ن π + (- ۱)^ن^ طہ ہوگی۔

۱۰ — ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جسکا نصف قطر ایک ہے اور اس دائرہ کے محیط کو ن مساوی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان قوسوں کے وتروں پر قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں جن کے راس باہر کی جانب ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان مثلثوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو

ان راسوں کے جو فاصلے دائرہ کے مرکز سے ہوں گے اُن سب کے حاصل ضرب کی انتہا قوت ہوگی جہاں ع سے مراد وہ زاویہ ہے جو قوس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

۱۱۔ ایک دائرہ کے اندر جسکا نصف قطر اَ ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے، دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ ق سے دائرہ کا مماس کھینچا گیا ہے اور کثیر الاضلاع کے اضلاع اس مماس کو نقاط ا، ب، ج، د...... پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ حاصل ضرب ق ا × ق ب × ق ج × ق د ...... = اَ^{ن} مس ن ط اگر ن طاق ہو اور = اَ^{ن} اگر ن جفت ہو، اس میں ط سے مراد وہ زاویہ ہے جو ق اور کثیر الاضلاع کے ایک راس کے خط وصل کے محاذی دائرہ کے محیط پر بنتا ہے۔

۱۲۔ ایک دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ق ہے۔ دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا$_۱$ ا$_۲$ ا$_۳$ ..... ا$_ن$ بنایا گیا ہے جہاں راس ا$_۱$ وہ نقطہ ہے جو نقطہ ق کے قریب ترین ہے۔ اگر وتر ق ا$_۱$، ق ا$_۲$، ق ا$_۳$ ... ق ا$_ن$ کے طول بالترتیب ج$_۱$، ج$_۲$، .... ج$_ن$ ہوں تو ثابت کرو کہ مقدار

ج$_۱$ ج$_۲$ + ج$_۲$ ج$_۳$ + ... ج$_{ن-۱}$ ج$_ن$ − ج$_ن$ ج$_۱$

کی قیمت ق کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ کے نصف قطروں کا ایک سلسلہ دائرہ کے محیط کو ۲ ن مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور محیط پر کے کسی دیے ہوئے نقطہ سے ن مسلسل نصف قطروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان ن عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{ر^{ن}}{۲^{ن-۱}} \text{ جب ن ط}$$

ہوگا جہاں ر دائرہ مذکور کا نصف قطر ہے اور ط ان دو نصف قطروں کا درمیانی زاویہ ہے جن میں سے ایک تو محیط پر کے دیے ہوئے نقطہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے

اور دوسرا مذکورہ بالا ن نصف قطروں میں سے پہلا یا آخری نصف قطر ہے۔

۱۴ - اگر ایک دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا جائے اور اُس وتر کا طول جو محیط پر کے کسی ثابت نقطہ کو کثیر الاضلاع کے ایک راس سے وصل کرے ل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sum ل^{2ع} = ن ا^{2ع} \frac{\lfloor 2ع}{\{\lfloor ع\}^2}$$

۱۵ - ایک دائرہ کے اندر جسکا مرکز د ہے اور نصف قطر ر ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د .. بنایا گیا ہے۔ کثیر الاضلاع کے سب راسوں سے ایک خط پر جو د ا پر عمود ہے اور جس کا فاصلہ مرکز د سے ب (> ر) ہے عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$ب^{ن}\left[جم^{ن}\left(\tfrac{1}{2} جب^{-1} \frac{ر}{ب}\right) - جب^{ن}\left(\tfrac{1}{2} جب^{-1} \frac{ر}{ب}\right)\right]^2$$ ہے

۱۶ - ثابت کرو کہ مساوات ط = جم ط سے ط کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ قیمت $\frac{\pi}{4}$ سے کم ہے۔

۱۷ - ثابت کرو کہ ط کی عام قیمت جو مساوات

(جم ط + خ جب ط)(جم ۲ط + خ جب ۲ط) .. .. ن اجزائے ضربی تک = ۱ کو پورا کرتی ہے، $\frac{4 م \pi}{ن(ن+1)}$ ہے جہاں م سے مراد کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۸ - ثابت کرو کہ $و^{\pi} + و^{-\pi} = 2\left\{1+2^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}$ ... تا لاتناہی

۱۹ - ثابت کرو کہ $1 + \frac{لا^3}{\lfloor 3} + \frac{لا^6}{\lfloor 6} + \frac{لا^9}{\lfloor 9} + \ldots\ldots$ تا لاتناہی

$$= \frac{1}{3}\left[و^{لا} + 2 و^{-\frac{لا}{2}} جم\left(\frac{\sqrt{3}\, لا}{2}\right)\right]$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ $\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} + \frac{\text{لا}^{۷}}{|\underline{۷}} + \frac{\text{لا}^{۱۰}}{|\underline{۱۰}} + \text{......}$ تا لا انتہا

$$= \frac{۱}{۳}\,\text{و}^{\text{لا}} - \frac{۱}{۳}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \left(\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} - \sqrt{۳}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{\text{ر}\to ۱}^{\text{ر}\to\infty} \left[\frac{۱}{۲(۱+\text{ر}۳)} + \frac{۱}{۲(۱-\text{ر}۳)}\right]$$

کا حاصل جمع $\frac{۸\,\pi^{۲}}{۷۲۹} - ۱$ ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\,\frac{\pi۲}{۱۷} + \text{جم}\,\frac{\pi۴}{۱۷} + \text{جم}\,\frac{\pi۶}{۱۷} + \text{......} + \text{جم}\,\frac{\pi۱۴}{۱۷} + \text{جم}\,\frac{\pi۱۶}{۱۷} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\text{اور}\ \text{قط}\,\frac{\pi۲}{۱۷} + \text{قط}\,\frac{\pi۴}{۱۷} + \text{.....} + \text{قط}\,\frac{\pi۱۴}{۱۷} + \text{قط}\,\frac{\pi۱۶}{۱۷} = ۸$$

۲۳۔ اگر $\text{ھ} = \frac{\pi۲}{۲۱}$ تو ثابت کرو کہ جملات

$$\text{جم}\,\text{ھ} + \text{جم}\,۵\text{ھ} + \text{جم}\,۱۷\text{ھ}$$

$$\text{اور}\quad \text{جم}\,۱۱\text{ھ} + \text{جم}\,۱۳\text{ھ} + \text{جم}\,۱۹\text{ھ}$$

کی قیمتیں بالترتیب $\frac{۱ + \sqrt{۲۱}}{۴}$ اور $\frac{۱ - \sqrt{۲۱}}{۴}$ ہیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ $\text{مس}\,\text{ھ} + \text{مس}\left(\text{ھ} + \frac{\pi۲}{۵}\right) + \text{مس}\left(\text{ھ} + \frac{\pi۴}{۵}\right)$

$$+ \text{مس}\left(\text{ھ} + \frac{\pi۶}{۵}\right) + \text{مس}\left(\text{ھ} + \frac{\pi۸}{۵}\right) = ۵\,\text{مس}\,۵\text{ھ}$$

۲۵۔ ثابت کرو کہ جس مساوات کی اصلیں $\text{مس}\,\frac{\pi\text{ر}}{۱۵}$ ہیں (جہاں ر شمول اُس کوئی عدد ہے جو ۱۵ سے کم ہے اور بلحاظ ۱۵ کے مفرد ہے) وہ یہ ہے

$$\text{لا}^{۸} - ۹۲\,\text{لا}^{۶} + ۱۳۴\,\text{لا}^{۴} - ۲۸\,\text{لا}^{۲} + ۱ = ۰$$

۲۶۔ سلسلہ $\text{جب}\,۲\text{ط} - \frac{۱}{۲}\,\text{جب}\,۴\text{ط} + \frac{۱}{۳}\,\text{جب}\,۶\text{ط} - \text{......}$ تا لا انتہا

کے حاصل جمع سے یا کسی دوسرے طریقہ سے ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots\dots \text{ تا لامتناہی}$$

۲۷۔ دفعہ ۳۵ مساوات (۴) کو تسلیم کر کے ثابت کرو کہ

$$ط^2 = جب^2 ط + \frac{2}{3}\,\frac{جب^4 ط}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\,\frac{جب^6 ط}{3} + \dots$$

۲۸۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2لا}\,\frac{جیبز\, لا}{جمز\, لا - جم\, عہ} - \frac{1}{عہ^2 + لا^2} = \sum_{ن \to -\infty}^{ن \to \infty} \left\{ \frac{1}{(2ن\pi - عہ)^2 + لا^2} + \frac{1}{(2ن\pi + عہ)^2 + لا^2} \right\}$$

۲۹۔ ثابت کرو کہ $جیبز^{-1} لا$ کی عام قیمت

$$خ\, ک\pi + (-1)^{ک}\, لوک\left[لا + \sqrt{1 + لا^2}\right]$$

ہے جہاں ک کسی صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

۳۰۔ ایک مربع ا ب ج د کا ایک ضلع ب ج لا انتہا بڑھایا گیا ہے اور اس پر فاصلے ج $ج_1$، $ج_1 ج_2$، $ج_2 ج_3$ ... ناپے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ ب ج کے برابر ہے، اگر زاویا ب ا $ج_1$، ب ا $ج_2$، ب ا $ج_3$ ...... کو بالترتیب $ط_1$، $ط_2$، $ط_3$ ...... سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$جب\, ط_1\, جب\, ط_2\, جب\, ط_3 \dots\dots \text{ تا لامتناہی} = \sqrt[4]{\frac{32}{و^4 - و^2}}$$

۳۱۔ ایک نقطہ ن ایک منتظم کثیر الاضلاع کی سطح میں واقع ہے۔ اگر کثیر الاضلاع کے راسوں کے فاصلے ن سے بالترتیب $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$ ...... $ر_ن$ ہوں تو

ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{م}_1^2} + \frac{1}{\text{م}_2^2} + \dots + \frac{1}{\text{م}_{\text{ن}}^2} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}^2 - \text{ا}^2} = \frac{\text{ر}^{2\text{ن}} - \text{ا}^{2\text{ن}}}{\text{ر}^{2\text{ن}} - 2\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ر}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\text{ط} + \text{ا}^{2\text{ن}}}$$

جہاں ا، کثیر الاضلاع کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، ر اس دائرہ کے مرکز اور ن کے مابینی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے اور ط سے مراد وہ زاویہ ہے جو خط د ن، کسی زاویہ کے رأس اور مرکز کو ملانے والے خط سے بناتا ہے۔

۳۲۔ اگر $\text{ط} + \text{ف} + \text{ہ} = ۲\pi$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^2\text{ط} + \text{جم}^2\text{ف} + \text{جم}^2\text{ہ} - ۲\,\text{جم}\,\text{ط}\,\text{جم}\,\text{ف}\,\text{جم}\,\text{ہ} = ۱$$

اس سے ان چھ خطوط کے طولوں کا باہمی ربط مستنبط کرو جو چار ہم سطح نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مزید متفرق مثالیں

۱۔ اگر $(\text{ا}_1 + \text{خ ب}_1)(\text{ا}_2 + \text{خ ب}_2) \ldots (\text{ا}_n + \text{خ ب}_n) = \text{ا} + \text{خ ب}$

تو ثابت کرو کہ $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3} + \ldots$

$\ldots + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_n}{\text{ا}_n} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ [ڈی مائیورے کا مسئلہ استعمال کرو]

۲۔ اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک جیب لا} = \text{لوک لا} - \frac{\text{لا}^2}{6} - \frac{\text{لا}^4}{180}$$

۳۔ ثابت کرو کہ جیب (ب − ج) + جیب (ج − ء) + جیب (ء − ب)

$$= ۴ \ \text{جیب}\frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}\ \text{جیب}\frac{\text{ج} - \text{ء}}{2}\ \text{جیب}\frac{\text{ء} - \text{ب}}{2}$$

۴۔ ثابت کرو کہ کسی زاویہ ط کا توسی ناپ ایک مستقل مقدار اور ذیل کے دو سلسلوں میں سے ایک کے حاصل جمع کے مساوی ہے:

$$\text{مس ط} - \frac{1}{3}\text{مس}^3\text{ط} + \frac{1}{5}\text{مس}^5\text{ط} - \ldots\ldots$$

$$-\text{مم ط} + \frac{1}{3}\text{مم}^3\text{ط} - \frac{1}{5}\text{مم}^5\text{ط} + \ldots\ldots\ldots$$

دونوں صورتوں میں تمیز کرو اور ۴۹°، ۲۰۰° کے زاویوں کے لیے مستقلوں کی مقدار معلوم کرو۔

۵۔ سلسلہ $1 - \frac{\text{لا}^2}{2!} + \frac{3\,\text{لا}^4}{4!} - \frac{5\,\text{لا}^6}{6!} + \ldots$ تا لاتناہی کو جمع کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ $\text{مم}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{2}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} + 1}{\text{لا} - 1}$

نیز مس^-۱ لا کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

۷ — ثابت کرو کہ

۱ / (۲ جم عہ − ۱ / (۲ جم عہ − ۱ / (۲ جم عہ − ... − ۱ / (۲ جم عہ + ق)))) = (جب ن عہ + ق جب (ن−۱) عہ) / (جب (ن+۱) عہ + ق جب ن عہ)

جہاں دائیں جانب کے خارج قسمتوں کی تعداد ن ہے۔ (استقراء کا طریقہ استعمال کرو)

۸ — ثابت کرو کہ ن حادہ زاویوں کی جیوب التمام کی ہندسی اوسط ان زاویوں کی حسابی اوسط کی جیب التمام سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۹ — ۱۶ + ۸۸ √−۱ کے تمام جذر الکعب محسوب کرو، یہ معلوم ہے کہ جب مس ط = ۲ تو مس ۳ط = ۲/۱۱

۱۰ — اگر لا گھٹتے گھٹتے صفر ہو جائے تو (قو^جب لا − قو^جب لا − ۲ مس لا) / (مس لا − لا) کی

انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ

(۱) ۲ مس^-۱ [√((ا − ب)/(ا + ب)) مس (لا/۲)] = جم^-۱ ((ب + ا جم لا)/(ا + ب جم لا))

(۲) لوک ((√(ا + ب) + √(ا − ب) مس (لا/۲)) / (√(ا + ب) − √(ا − ب) مس (لا/۲))) = جمز^-۱ ((ب + ا جم لا)/(ا + ب جم لا))

۱۲ — صفر سے π تک لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ

(۲/(۱×۳)) جب ۲لا − (۴/(۳×۵)) جب ۴لا + (۶/(۵×۷)) جب ۶لا − ..... تا لا متناہی

کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳ – ثابت کرو کہ سلسلہ

مس عہ مس ۲عہ + مس ۲عہ مس ۳عہ + مس ۳عہ مس ۴عہ ....

کی ن-۱ رقموں کا حاصل جمع مس ن عہ مم طہ - ن ہے۔

اس سے سلسلہ ۱ × ۲ + ۲ × ۳ + ۳ × ۴ + ... (ن-۱) رقموں تک کا حاصل جمع مستنبط کرو۔

۱۴ – ثابت کرو کہ

$$\sqrt{۲} = \frac{۴ \times ۳۶ \times ۱۰۰ \times ۱۹۶ \times ۳۲۴ \times \cdots\cdots}{۳ \times ۳۵ \times ۹۹ \times ۱۹۵ \times ۳۲۳ \times \cdots\cdots}$$

اور

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۸ \times ۸۰ \times ۲۲۴ \times ۴۴۰ \times \cdots\cdots}{۹ \times ۸۱ \times ۲۲۵ \times ۴۴۱ \times \cdots\cdots}$$

[دفعہ ۲۲۳ کا جواب استعمال کرو]

۱۵ – ایک جریب کے ذریعہ زمین کے ایک مثلث ٹکڑے کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ جریب ہیں۔ لیکن جریب کے متواتر استعمال سے اس کا طول اصلی جریب کے طول سے بقدر ۲ فیصد کے زیادہ ہو گیا ہے۔ اگر ۱۰۰ جریب = ۶۶ فٹ تو بتاؤ کہ مثلث کے محسوبہ رقبہ میں کتنے مربع فٹ کی غلطی ہے

۱۶ – ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کا قطر بیرونی دائرہ کے نصف قطر سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ [حصہ اول دفعہ ۲۰۸ کے نتیجہ صریح کو استعمال کرو]

۱۷ – اگر لا = جم طہ + خ جب طہ تو ثابت کرو کہ

$\frac{\text{۱}}{\text{۲ لا +}}$ $\frac{\text{۱}}{\text{۲ لا + ۲}}$ + $\frac{\text{۱}}{\text{۲ لا +}}$ . ... تا لاتناہی

= (جم طہ + جم۲ طہ)$^{\frac{1}{2}}$ − جم طہ + $\sqrt{-1}$ [(۱ + جم طہ − جم۲ طہ)$^{\frac{1}{2}}$ − جب طہ]

۱۸ — سنیلیس کا ضابطہ ثابت کرو یعنی یہ ثابت کرو کہ اگر لا چھوٹا ہو تو لا اور

$\frac{\text{۳ جب ۲ لا}}{\text{۲ (۲ + جم ۲ لا)}}$ کا فرق تقریباً $\frac{\text{۴ لا}^{\text{۵}}}{\text{۴۵}}$ ہوتا ہے۔

۱۹ — ثابت کرو کہ مس$^{-1}$ (خ $\frac{\text{لا − ۱}}{\text{لا + ۱}}$) = − $\frac{\text{خ}}{\text{۲}}$ لوک $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$

۲۰ — سلسلہ $\frac{\text{۷}}{\text{۱ × ۳ × ۵}}$ + $\frac{\text{۱۹}}{\text{۵ × ۷ × ۹}}$ + $\frac{\text{۳۱}}{\text{۹ × ۱۱ × ۱۳}}$ + ... کا

حاصل جمع لاتناہی تک محسوب کرو، اس میں شمار کنندے سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

(دفعہ ۹۴ میں طہ کو $\frac{\pi}{\text{۴}}$ کے مساوی رکھو)

۲۱ — سلسلہ $\frac{\text{جم طہ}}{\text{۱ × ۲}}$ + $\frac{\text{جم ۲ طہ}}{\text{۲ × ۳}}$ + $\frac{\text{جم ۳ طہ}}{\text{۳ × ۴}}$ + ... کا حاصل جمع

لاتناہی تک معلوم کرو۔

۲۲ — سلسلہ مس عہ + ۲ مس ۲ عہ + ۲$^{\text{۲}}$ مس ۲$^{\text{۲}}$ عہ + ... کی ن

رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۳ — $\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ − جب عہ جم طہ}}$ کو طہ کے اضعاف کی جیوب کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۲۴ — سلسلہ $\sum_{\text{ن} = -\infty}^{\text{ن} \to \infty}$ $\frac{\text{ا ن + ب}}{\text{(ن + ا)(ن + ب)(ن + ج)}}$ کا حاصل جمع

معلوم کرو۔

(اس کو کسور جزوی میں تحلیل کرو اور امثلہ ۲۱ مشق ۷ کے ربط سے کام لو)

۲۵ — اگر جم طہ + جم فہ + جم سہ = ۰ اور جب طہ + جب فہ + جب سہ = ۰
تو ثابت کرو کہ جم ۳ طہ + جم ۳ فہ + جم ۳ سہ − ۳ جم (طہ + فہ + سہ) = ۰
اور جب ۳ طہ + جب ۳ فہ + جب ۳ سہ − ۳ جب (طہ + فہ + سہ) = ۰

۲۶ — ثابت کرو کہ جس زاویہ کی جیب $\frac{۱}{۳}$ ہا تم ہے اس کا اور دو قائموں کے ساتویں حصہ کا فرق ایک نیم قطری کے ہزارویں حصہ سے کم ہے۔

۲۷ — ایک دائرہ کے قطعہ کا ارتفاع ف ہے اور اس کے وتر کا طول ج ہے
ثابت کرو کہ اگر $\frac{ف}{ج}$ کی دوسری اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے
تو اس قطعہ کا رقبہ $\frac{۲}{۳}$ ف ج کے مساوی ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ مساوات جبز لا = جبز عہ کے سب حل جملہ ن خ ۲ + (−۱)^{ن} عہ میں شامل ہیں۔

۲۹ — اگر لا ۰ اور ۲ ۲ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{جب ۲ لا}{۱ \times ۲} + \frac{جب ۳ لا}{۲ \times ۳} + \frac{جب ۴ لا}{۳ \times ۵} + \text{تا لاانتہا}$$

$$= \frac{۱}{۲} جب لا \left[۱ - ۲ لوک \left(۲ جب \frac{لا}{۲} \right) \right]$$

۳۰ — اگر یہ معلوم ہو کہ مس (فہ + طہ) جم ۲ عہ = مس فہ تو ثابت کرو کہ
طہ = مس^{۲} عہ جب ۲ فہ + $\frac{۱}{۲}$ مس^{۴} عہ جب ۴ فہ + $\frac{۱}{۳}$ مس^{۶} عہ جب ۶ فہ + ...

۳۱ — ایک مثلث کا رقبہ ذیل کی پیمائشوں کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے:
ب = ۱۲۵ فٹ، ج = ۱۶۰ فٹ، ا = ۷۰° ۴۵′، انہی اجزا کی دوسری پیمائش
کی رو سے ب = ۱۲۵٫۵ فٹ، ج = ۱۶۱ فٹ، ا = ۷۰° ۲۵′ بتاؤ کہ ان
محصلہ رقبوں میں کتنے فیصد کا فرق ہے۔

۳۲ - جب (عہ - بہ) + جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

[ایک مثلث ا ب ج کے بڑے سے بڑا رقبہ پر غور کرو جبکہ مثلث ایک ایسے دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے جسکا مرکز و ہے اور خطوط و ا، و ب، و ج ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ زاوئے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں]

۳۳ - مساواتِ متماثلہ $\frac{\text{ا}^2}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})} + \frac{\text{ب}^2}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})} + \frac{\text{ج}^2}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})} = 1$

سے ذیل کے متماثلات مستنبط کرو:-

$\sum$ جم ۳ (عہ + طہ) جب (بہ - جہ)

= ۴ جم (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

اور $\sum$ جب ۳ (عہ + طہ) جب (بہ - جہ)

= ۴ جب (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

[ا = جم (۲ عہ + ۲ طہ) + خ جب (۲ عہ + ۲ طہ)، ...... رکھو]

۳۴ - ثابت کرو کہ مس لا - ۲۴ مس $\frac{\text{لا}}{2}$ اور ۴ جب لا - ۱۵ لا کا فرق ساتویں مرتبہ کی مقدار سے بھی کم ہے۔

۳۵ - اگر ایک مستدیر قوس کے وتر کا طول ا ہو اور اس قوس کے نصف کے وتر کا طول ب ہو تو ثابت کرو کہ قوس کا طول تقریباً $\frac{8\text{ب} - \text{ا}}{3}$ ہے۔

اگر قوس مذکور کے ایک ربع کے وتر کا طول ج ہو تو ثابت کرو کہ قوس کے طول کی نسبتاً زیادہ صحیح قیمت $\frac{\text{ا} - 40\text{ب} + 256\text{ج}}{45}$ ہوگی۔

اگر قوس ایک ربع ہو تو ثابت کرو کہ ان سے ح کی قیمتیں بالترتیب عشاریہ کے دوسرے اور پانچویں مقام تک صحیح نکلتی ہیں۔

۳۶ ۔ اگر $\text{لوک}_{و}\ \text{لوک}_{و}\,(\text{لا} + \text{خ}\ \text{ما}) = \text{ف} + \text{خ}\ \text{ق}$ تو

$$\text{ما} = \text{لا}\ \text{سس}\left[\text{سس}\ \text{ق}\ \text{لوک}_{و}\ \text{را}\ \sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}\right]$$

۳۷ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\,\text{ط} - \frac{\text{جم}^{۳}\text{ط}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{جم}^{۵}\text{ط}}{\lfloor ۵} - \cdots}{۱ - \frac{\text{جم}^{۲}\text{ط}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{جم}^{۴}\text{ط}}{\lfloor ۴} - \cdots} = \frac{\text{جم}\,\text{ط} - \frac{\text{جم}\ ۳\,\text{ط}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{جم}\ ۵\,\text{ط}}{\lfloor ۵} - \cdots}{۱ - \frac{\text{جم}\ ۲\,\text{ط}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{جم}\ ۴\,\text{ط}}{\lfloor ۴} - \cdots}$$

۳۸ ۔ سلسلہ $\text{جب}\,\text{ط}\ \text{قط}\ ۳\,\text{ط} + \text{جب}\ ۳\,\text{ط}\ \text{قط}\ ۳^{۲}\text{ط} + \text{جب}\ ۳^{۲}\text{ط}\ \text{قط}\ ۳^{۳}\text{ط} + \cdots\cdots$ تا ن رقوم کو جمع کرو۔

۳۹ ۔ ایک مثلث ا ب ج میں اگر $\text{ب} < \text{ا}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \text{ج} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\ \text{جب}\ ۲\,\text{ج} + \frac{۱}{۳}\,\frac{\text{ب}^{۳}}{\text{ا}^{۳}}\ \text{جب}\ ۳\,\text{ج} + \cdots\cdots$$

اور (۲)

$$\frac{\text{ا}^{\text{ن}}}{\text{ج}^{\text{ن}}}\ \text{جب}\ \text{ن}\,\text{ب} = \text{ن}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \text{ج} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\lfloor ۲}\times\frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\ \text{جب}\ ۲\,\text{ج} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)}{۱\times۲\times۳}\times\frac{\text{ب}^{۳}}{\text{ا}^{۳}}\ \text{جب}\ ۳\,\text{ج} + \cdots\cdots$$

۴۰ ۔ ایک مثلث کے اضلاع کے طول حسب پیمائش یہ ہیں: ا = ۲، ب = ۳، ج = ۴، بعد میں معلوم ہوا کہ ج کی پیمائش میں تھوڑی سی غلطی واقع ہوگئی ہے، بتاؤ کہ کونسا زاویہ کامل صحت کے ساتھ معلوم ہوسکتا ہے۔

۴۱ — مساوات متماثلہ

$$ا^۲ \frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + ب^۲ \frac{(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)} + ج^۲ \frac{(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = لا^۲$$

سے متماثلات $جم ۲(ط+ع) \frac{جب(ط-ب)\ جب(ط-ج)}{جب(ع-ب)\ جب(ع-ج)}$ + دو متشابہ رقوم = جم ۴ ط

اور $جب ۲(ط+ع) \frac{جب(ط-ب)\ جب(ط-ج)}{جب(ع-ب)\ جب(ع-ج)}$ + دو متشابہ رقوم = جب ۴ ط مستنبط کرو

۴۲ — اگر $مس(ط-ذ) = \frac{د^۲ جب ط جم ط}{۱-د^۲ جب^۲ ط}$ اور د بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$ذ = ط - \frac{د^۲}{۲} جب ۲ط - \frac{د^۴}{۸}(۲ جب ۲ط - جب ۴ط) + \cdots$$

۴۳ — اگر $جم\left(\frac{\pi}{۲} جب ط\right) = جب\left(\frac{\pi}{۲} جم ط\right)$ تو ثابت کرو کہ ط کی قیمتوں کے چار جوڑے حل

$$\pm ط = \left(۲م + \frac{۳}{۴}\right)\pi \pm مخ لوک \frac{۴ن - ۱ + \sqrt{۱۶ن^۲ - ۸ن - ۱}}{\sqrt{۲}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں م اور ن کسی مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور م صفر بھی ہوسکتا ہے۔

ن = ۰ کی صورت میں اس کا کیا حل ہوگا؟

۴۴ — سلسلہ $مس ط\ مس^۲ \frac{ط}{۲} + ۲\ مس \frac{ط}{۲}\ مس^۲ \frac{ط}{۲^۲} + ۲^۲\ مس \frac{ط}{۲^۲}\ مس^۲ \frac{ط}{۲^۳} + \cdots\cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۴۵ — اگر مم فہ = $\frac{۱}{لا}$ + مم طہ تو فہ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلاؤ جو لا کی صعودی قوتوں پر مشتمل ہو۔

۴۶ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۲ \times ۱}{۳^{۲}} + \frac{۳ \times ۲}{۵^{۲}} + \frac{۴ \times ۳}{۷^{۲}} + \dots\dots \text{تا لاتناہی}$$

کا حاصل جمع $\frac{\pi^{۲}(۱۲ - \pi^{۲})}{۳۸۴}$ ہے۔ (دفعہ ۱۲۷ کو استعمال کرو)

۴۷ — کسر مسلسل مم طہ — $\frac{۲}{\text{مم ۲ طہ} -}$ $\frac{۲}{\text{مم}^{۲}\text{ ۲ طہ} -}$ ... $\frac{۲}{\text{مم ۲}^{ن-۱}\text{ طہ} -}$ $\frac{۲}{\text{مس ۲}^{ن}\text{ طہ}}$

کی قیمت معلوم کرو۔

۴۸ — ثابت کرو کہ کسی مستوی مثلث کی صورت میں جملہ

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب

کی قیمت ۰ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہوسکتی۔

(پہلے دکھاؤ کہ جملۂ مذکور = ۱ + قط ا قط ب قط ج اور پھر دفعہ ۱۵۲ کا طریقہ استعمال کرو)

۴۹ — اگر جم ی = جم (ی + لا) جم $\triangle$ + جب (ی + لا) جب $\triangle$ جم ھ (جہاں ھ اور $\triangle$ اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے کعبوں سے بڑی قوتیں نظرانداز ہوسکتی ہیں) تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} = \triangle \text{ جم ھ} - \frac{۱}{۲} \triangle^{۲} \text{ مم ی جب}^{۲} \text{ ھ} + \frac{۱}{۳} \triangle^{۳} \text{ جم ھ جب}^{۲} \text{ ھ}$$

۵۰ — ثابت کرو کہ اگر

$$(۱ + \text{خ مس عہ})^{۱ + \text{خ مس بہ}}$$

کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ایک قیمت (قط عہ)$^{\text{قط}^{۲}\text{ بہ}}$ ہوگی۔

۵۱ – سلسلہ $\frac{تم\,۲عہ}{۱-جم^۲\,۲عہ\,قط^۲عہ} + \frac{تم\,۳عہ}{۱-جم^۲\,۳عہ\,قط^۲عہ} + \frac{تم\,۴عہ}{۱-جم^۲\,۴عہ\,قط^۲عہ} + \cdots$

... کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۲ – ثابت کرو کہ

$$\sqrt{۱+قم\frac{ط}{۲}} = (۱-و^{خ ط})^{-\frac{۱}{۲}} + (۱-\bar{و}^{خ ط})^{-\frac{۱}{۲}}$$

اس سے $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+قم\frac{ط}{۲}}$ کی تفصیل ط کے اضعاف کی جیوب التمام میں معلوم کرو۔

۵۳ – ثابت کرو کہ $\frac{(لا+۱)^{۲ن}+(لا-۱)^{۲ن}}{۲} = \prod_{ر=۱}^{ر=ن}\left[لا^۲+مس^۲\frac{(۲ر-۱)\pi}{۴ن}\right]$

(دفعہ ۱۲۰ کا پہلا ضابطہ استعمال کرو)

۵۴ – سلسلہ $\frac{۱}{۱^۲\times ۲^۲} \times \frac{۱}{۲^۲\times ۳^۲} + \frac{۱}{۳^۲\times ۴^۲} + \cdots$ تا لامتناہی کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۵ – ثابت کرو کہ اُس بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ جس کا قاعدہ ب ہو اور جسکے اضلاع کی نسبت ر ہو $\frac{ر\,ب^۲}{۲(ر^۲-۱)}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۵۶ – ترسیم بنا کر ثابت کرو کہ مساوات جب لا = مس لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے اور بڑی مثبت اصلیں زوجوں پر مشتمل ہوتی ہیں جن میں سے ایک $(۲ث+\frac{۱}{۲})\pi$ سے قدرے بڑی ہوتی ہے اور دوسری قدرے چھوٹی جہاں ث کسی بڑے مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

۵۷ – ایک دائرہ کے اندر اور باہر ن اضلاع کے منتظم کثیر الاضلاع بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ن بہت بڑا ہو تو محیطوں کا اوسط لینے سے π کی جو تقریبی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ اُس قیمت سے جو رقبوں کا اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے بقدر $\frac{\pi^۳}{۱۲ن^۲}$ کے زیادہ صحیح ہے۔

۵۸- ایک دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے۔ اس کثیر الاضلاع کے راسوں سے دائرہ کے ایک مماس پر عمود نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مکعبوں کا حاصل جمع $\frac{\text{ن ا}^{۳}}{۲}$ قم^{۳} ن ط ہے جہاں ۲ ط اس زاویے کو تعبیر کرتا ہے جو نقطۂ تماس میں سے گزرنے والا نصف قطر کثیر الاضلاع کے کسی راس الزاویہ میں سے گزرنے والے نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے۔

۵۹- ثابت کرو کہ $\frac{(\text{ا} + \text{خ ب})^{\text{ف} + \text{خ ق}}}{(\text{ا} - \text{خ ب})^{\text{ف} - \text{خ ق}}}$ کی قیمت خاص

جم ۲ (ف عہ + ق لوک ر) + خ جب ۲ (ف عہ + ق لوک ر) ہے

جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$ اور $\text{عہ} = \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۶۰- سلسلہ قم ط + قم $\frac{\text{ط}}{۲}$ + قم $\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}$ + ... کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۱- سلسلہ $\frac{۱}{۱ - \text{مسز عہ مسز ۲ عہ}} + \frac{۱}{۱ - \text{مسز ۲ عہ مسز ۴ عہ}} + \frac{۱}{۱ - \text{مسز ۳ عہ مسز ۶ عہ}} + \ldots$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۲- ثابت کرو کہ $\frac{\text{جب ط}}{۱ - ۲\text{ما} + \text{ما}^{۲}\text{قط}^{۲}\text{ط}} = \sum_{\text{ن}=۰}^{\text{ن}=\infty} \text{ما}^{\text{ن}}\text{قط}^{\text{ن}}\text{ط جب (ن + ۱) ط}$

۶۳- ثابت کرو کہ $\frac{\left(۱ + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۹} + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۲۵} + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\ldots}{\left(\frac{۱}{۴} + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۱۶} + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۳۶} + \frac{\pi^{۲}}{۴}\right)\ldots} = \frac{\text{و}^{۲} + ۱}{\text{و}^{۲} - ۱}$

۶۴- ثابت کرو کہ

$\text{جب ط} + \text{جم ط} = \left(۱ + \frac{۴\text{ط}}{\pi}\right)\left(۱ - \frac{۴\text{ط}}{۳\pi}\right)\left(۱ + \frac{۴\text{ط}}{۵\pi}\right)\left(۱ - \frac{۴\text{ط}}{۷\pi}\right)\ldots$

اور اس سے مستنبط کرو ا − ۱/۳^۳ + ۱/۵^۳ − ۱/۷^۳ + ... = ۳^π/۳۲

(اشارہ ۲۱ سوال ۱۳ میں ہ = π/۴ رکھو، پھر لوگارتم لو اور ط کی قوتوں کے سروں کو مساوی کرو)

۶۵ — ثابت کرو کہ جم^۲ π/۱۱ + جم^۲ ۲π/۱۱ + جم^۲ ۳π/۱۱ + جم^۲ ۴π/۱۱ + جم^۲ ۵π/۱۱ =

۶۶ — اگر لا = جب π/۹ تو ثابت کرو کہ لا مساوات

۶۴ لا^۶ − ۹۶ لا^۴ + ۳۶ لا^۲ − ۳ = ۰

کی اصل ہے، مساوات کی باقی اصلیں دریافت کرو۔

۶۷ — ثابت کرو کہ مساوات

ما^۶ − ما^۵ − ۶ ما^۴ + ۶ ما^۳ + ۸ ما^۲ − ۸ ما + ۱ = ۰

کی اصلیں ۲ جم رπ/۲۱ کی قیمتیں ہیں جبکہ ر کو ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۶، ۲۰ میں سے کوئی قیمت دی جائے۔

۶۸ — اگر لا + خ ما = ب (جم ہ + خ جب ہ) (جم ط + خ جب ط)
+ ج (جم جہ − خ جب جہ) (جم ط − خ جب ط)

(جہاں ب، ہ، ج، جہ حقیقی مستقل ہیں اور لا، ما، ط حقیقی متغیر ہیں) ثابت کرو کہ جیسے ط بدلتا ہے نقطہ (لا، ما) ایک مخروطی کو مرتسم کرتا ہے۔

۶۹ — اگر ف = ط − ۲ د جب ط + ۳د^۲/۴ جب ۲ ط − د^۳/۳ جب ۳ ط تو ثا[بت کرو کہ]

ط = ف + ۲د جب ف + ۵د^۲/۴ جب ۲ف + د^۳/۱۲ (۱۳ جب ۳ ف − ۳ جب [ف])

جہاں د کی تیسری سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۷۰ — ثابت کرو کہ اگر ط کی پانچویں سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی جا[ئیں تو]

ط = ۲ جب ط/۲ + √((جب ط − ۲ جب ط/۲)^۲ + (۱ − جم ط)^۲)

۷۱ — اگر ایک دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے ایک منتظم مسبع (سات ضلعوں کی شکل) بنایا جائے اور اس کے چار متصل رأس ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{اج} + \text{اد} - \text{اب} = \sqrt{7}$$

۷۲ — ثابت کرو کہ

$$\text{قط لا} = 1 + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{5\,\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \frac{61\,\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \frac{1385\,\text{لا}^8}{\lfloor 8} + \cdots\cdots$$

$$\text{اور قط}^3\,\text{لا} = 1 + \frac{3\,\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{33\,\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \frac{723\,\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

۷۳ — اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم}^2\frac{2\pi}{2\text{ن}} + \text{مم}^2\frac{4\pi}{2\text{ن}} + \cdots + \text{مم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}} = \frac{1}{6}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)$$

۷۴ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم}^2\frac{\pi}{2\text{ن}} + \text{مم}^2\frac{3\pi}{2\text{ن}} + \cdots + \text{مم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}} = \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}-1)$$

۷۵ — اگر ن کوئی جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو

$$\text{قط}^2\frac{\pi}{2\text{ن}} + \text{قط}^2\frac{5\pi}{2\text{ن}} + \text{قط}^2\frac{9\pi}{2\text{ن}} + \cdots + \text{قط}^2\frac{(2\text{ن}-3)\pi}{2\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2}{2}$$

۷۶ — ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \text{قط}^2\left(\text{عہ} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$ مساوی ہے $\text{ن}^2\,\text{قط}^2\,\text{ن عہ}$ کے اور اگر ن جفت ہو تو یہ مساوی ہے

$$\frac{\text{ن}^2}{1-(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\text{جم ن عہ}} \text{ کے۔}$$

۷۷ — دفعہ ۲۵ کی مساوات (۴) میں ن۳ کے سروں کو مساوی کرنے سے

ثابت کرو کہ ۱/۲ (جب⁻¹ لا)² = ۱/۲ × لا²/۲ + ۱/۲ (۱/۱² + ۱/۳²) ۳/۴ × لا⁴/۵ ×

+ ۱/۲ (۱/۱² + ۱/۳² + ۱/۵²) × ۳/۴ × ۵/۶ × لا⁶/۷ + ·····

۷۸۔ مساوات جبز لا = ۳ لا کو ترسیمی طریق پر حل کرو اور اس سے تحلیلی طریق
زیادہ صحیح طور پر تقریبی قیمت معلوم کرو۔

۷۹۔ مساوات ؤ^لا = ۳ لا کو ترسیمی طریق پر حل کرو اور اس سے تحلیلی طریق
کی زیادہ صحیح تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۸۰۔ اگر مس لا/۲ = مسز لا/۲ تو ثابت کرو کہ جم لا جبز لا = ۱
ترسیم اور جدولوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ اس مساوات کی چھوٹی سے چھ
تقریباً ۴٫۷۳۰ ہے، نیز دوسری اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۸۱۔ جب کبھی مساوات لا³ − ۳ ف لا + ق = ۰ کی دو اصلیں خیالی ہوں یعنی
ق² > ۴ ف³ تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ف منفی ہو تو اصلیں

۲√(−ف) جبزی، √(−ف) [− جبزی ± خ √۳ جمزی] ہونگی

جہاں جبز ۳ ی = ۱/۲ ق / (ف √(−ف))

اور (۲) اگر ف مثبت ہو اور ق منفی ہو تو اصلیں

۲√ف جمزی، √ف [− جمزی ± خ √۳ جبزی] ہونگی

جہاں جمز ۳ ی = − ۱/۲ ق / (ف √ف)

۸۲۔ اگر لا^(تا لامتناہی) = ا (جم عہ + خ جب عہ)
تو ثابت کرو کہ لا کی قیمت عامہ ر (جم ط + خ جب ط) ہے
جہاں لوک ر = ((۲ ن π + عہ) جب عہ + لوک ا جم عہ) / ا

$ط = \frac{(۲ن\pi + ہ)\ جم عہ - لوک\ ا\ جب عہ}{}$

استدلال ذیل کی غلطی معلوم کرو

$= (و^{-خ ط})^{خ} = \left[و^{(۲\pi - ط)خ}\right]^{خ} = و^{ط - ۲\pi}$

$\frac{۱}{عہ} = (۲ن + ۱)\frac{\pi}{۲}$ جہاں ن کی قیمت کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو

مساوات مس لا = لا کے حل تقریباً $\pm\left(\frac{۱}{عہ} - عہ - \frac{۲عہ^{۳}}{۳}\right)$

ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱\times۳} - \frac{۱}{۳\times۵} + \frac{۱}{۵\times۷} - \frac{۱}{۷\times۹} + \dots = \frac{\pi - ۲}{۴}$

$-\ \frac{۱}{۷\times۹} + \frac{۱}{۱۱\times۱۳} - \frac{۱}{۱۵\times۱۷} + \dots = \frac{\pi\sqrt{۲} - ۴}{۸}$

کے لئے لوک $\frac{۱+لا}{۱-لا}$ کی تفصیل میں لا کی بجائے خ مم خ $\frac{۱-خ}{۲ہ}$ رکھو]

سلسلوں کا حاصل جمع ن رقموں تک معلوم کرو

$\frac{جب ۳عہ}{جم ۲عہ\ جم ۴عہ} + \frac{جب ۵عہ}{جم ۴عہ\ جم ۶عہ} + \frac{جب ۷عہ}{جم ۶عہ\ جم ۸عہ} + \dots\dots$

$\frac{مس^{۲} ط}{۱ - ۳مس^{۲} ط} + \frac{۱}{۳}\frac{مس^{۲} ۳ط}{۱ - ۳مس^{۲} ۳ط} + \frac{۱}{۳^{۲}}\frac{مس^{۲} ۳^{۲}ط}{۱ - ۳مس^{۲} ۳^{۲}ط} + \dots$

$\frac{\dots + ۲جم ۲عہ}{جب ۴عہ} + \frac{۱ + ۲جم ۴عہ}{جب ۸عہ} + \frac{۱ + ۲جم ۸عہ}{جب ۱۶عہ}$

$جم \frac{ط}{۲} + ۲\ جم\frac{ط}{۲}\ جم\frac{ط}{۲^{۲}} + ۲^{۲}\ جم\frac{ط}{۲}\ جم\frac{ط}{۲^{۲}}\ جم\frac{ط}{۲^{۳}} + \dots\dots$

$\frac{جم ط - جم ۳ط}{جب ۳ط} + ۲\frac{۲جم ۳ط - جم ۳^{۲}ط}{جب ۳^{۲}ط} + \dots + ۲^{ن-۱}\frac{۲جم ۳^{ن-۱}ط - جم ۳^{ن}ط}{جب ۳^{ن}ط}$

$\frac{\dots ب لا - جب ۳لا}{جم ۳لا} + \frac{۳جب ۳لا - جب ۳^{۲}لا}{۳جم ۳^{۲}لا} + \dots + \frac{۳جب ۳^{ن-۱}لا - جب ۳^{ن}لا}{۳^{ن-۱}جم ۳^{ن}لا}$

۹۲ — $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ۲ط}} + \frac{\text{جب ۳ط}}{\text{جم ۲ط جم ۴ط}} + \frac{\text{جب ۵ط}}{\text{جم ۴ط جم ۶ط}} + \ldots\ldots$

۹۳ — $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط} - \text{جم ۲ط}} + \frac{\text{جب ۳ط}}{\text{جم ۳ط} - \text{جم ۶ط}} + \frac{\text{جب ۹ط}}{\text{جم ۹ط} - \text{جم ۱۸ط}} + \ldots\ldots$

۹۴ — $\frac{\text{جب ۳لا}}{\text{جب لا جب}^{۲}\text{ ۲لا}} + \frac{\text{جب ۶لا}}{\text{جب ۲لا جب}^{۲}\text{ ۴لا}} + \frac{\text{جب ۱۲لا}}{\text{جب ۴لا جب}^{۲}\text{ ۸لا}} + \ldots\ldots$

۹۵ — $\frac{۱}{۲}\text{مس ۲ط مس}^{۲}\text{ط} + \frac{۱}{۲^{۲}}\text{مس ۲}^{۲}\text{ط مس}^{۲}\text{ ۲ط} + \ldots\ldots$

$+ \frac{۱}{۲^{ر}}\text{مس ۲}^{ر}\text{ط مس}^{۲}\text{ ۲}^{ر-۱}\text{ط} + \ldots\ldots$

۹۶ — $\text{مس}^{-۱}\frac{۱۲}{۳۱} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱۲}{۱۳۹} + \ldots + \text{مس}^{-۱}\frac{۱۲}{۳۶ر^{۲} - ۵} + \ldots\ldots$

۹۷ — $\text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۷} + \text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۱۹} + \ldots + \text{مس}^{-۱}\frac{۴}{۴ر^{۲} + ۳} + \ldots\ldots$

۹۸ — $\text{ستز}^{-۱}\text{لا} + \text{ستز}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۱ - ۱\times۲\text{ لا}^{۲}} + \text{ستز}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۱ - ۲\times۳\text{ لا}^{۲}} + \ldots\ldots$

۹۹ — $\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا جب ط}}{۱ + \text{لا جم ط}} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}^{۲}\text{ جب ۲ط}}{۱ + \text{لا}^{۲}\text{ جم ۲ط}} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}^{۴}\text{ جب ۴ط}}{۱ + \text{لا}^{۴}\text{ جم ۴ط}}$

$+ \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}^{۸}\text{ جب ۸ط}}{۱ + \text{لا}^{۸}\text{ جم ۸ط}} + \ldots\ldots$

۱۰۰ — $\text{جمز}\frac{\text{ط}}{۲} + ۲\text{ جمز}\frac{\text{ط}}{۲}\text{ جمز}\frac{\text{ط}}{۴} + \ldots + ۲^{ن-۱}\text{ جمز}\frac{\text{ط}}{۲}\text{ جمز}\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}\text{ جمز}\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}\ldots\text{جمز}\frac{\text{ط}}{۲^{ن}}$

۱۰۱ — $\frac{۱}{۲}\text{قم}\frac{\text{ط}}{۲}\text{ مم}\frac{\text{ط}}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}}\text{قم}\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}\text{ مم}\frac{\text{ط}}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۲^{۳}}\text{قم}\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}\text{ مم}\frac{\text{ط}}{۲^{۳}} + \ldots\ldots$

۱۰۲ — ایک سلسلہ کی رویں رقم $\frac{۱}{\lfloor ر}\text{ جم ر ط مس}^{ر}\text{ط}$ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لاتناہی تک معلوم کرو۔

۱۰۲ ثابت کرو کہ

ط جب ط جم ط = ۲ جب ط جب^۲ ط/۲ + ۲^۲ جب ط/۲ جب^۲ ط/۲^۲ + ۲^۳ جب ط/۲^۲ جب^۲ ط/۲^۳ + ... تا لاتناہی

۱۰۴ — ثابت کرو کہ $\sum_{ن=۱}^{ن=\infty}$ (مس ط/۲^ن) / (۲^{ن-۱} جم^۲ ط/۲^{ن-۱}) = ۲/جب ۲ط − ۱/ط

۱۰۵ — ثابت کرو کہ π/۴ = مس^{-۱} ۱/۳ + مس^{-۱} ۲/۹ + مس^{-۱} ۴/۳۳ + مس^{-۱} ۸/۱۲۹ + ... تا لاتناہی

اور π/۴ = مس^{-۱} ۱/۳ + مس^{-۱} ۲/۹ + مس^{-۱} ۴/۳۳ + مس^{-۱} ۸/۱۲۹ + مس^{-۱} ۱/۱۶

۱۰۶ — ثابت کرو کہ $\sum_{ن=۱}^{ن=\infty}$ مس^{-۱} (۲/ن^۲) = ۳π/۴

۱۰۷ — ثابت کرو کہ مم^{-۱} ۲ + مم^{-۱} ۸ + مم^{-۱} ۱۸ + مم^{-۱} ۳۲ + ... تا لاتناہی = π/۴

۱۰۸ — سلسلہ لاتناہی ۱ + لا^۳/۳! + لا^۶/۶! + لا^۹/۹! + ... کا حاصل جمع معلوم کرو

۱۰۹ — ثابت کرو کہ لا + لا^۷/۷ + لا^{۱۳}/۱۳ + لا^{۱۹}/۱۹ + ... تا لاتناہی

= ۱/۱۲ لوک [(۱ + لا)^۲ (۱ + لا + لا^۲)] / [(۱ − لا)^۲ (۱ − لا + لا^۲)] + √۳/۶ مس^{-۱} [√۳ لا / (۱ − لا^۲)]

۱۱۰ — سلسلہ ۱ − ۱/۷ + ۱/۹ − ۱/۱۵ + ۱/۱۷ − ۱/۲۳ + ۱/۲۵ − .... تا لاتناہی

کا حاصل جمع معلوم کرو ۔

۱۱۱ — ثابت کرو کہ ۱/(۲۱ × ۲۳) + ۱/(۲۳ × ۲۵) + ۱/(۲۵ × ۲۷) + ... تا لاتناہی

= (π√۳ + ۳۰ − ۲۱ √۳ − ۳۸۴) / ۷۶۸

۱۱۲ — ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{۱}{۱+۴^۲}+\frac{۱}{۱+۸^۲}+\frac{۱}{۱+۱۲^۲}+\frac{۱}{۱+۱۶^۲}+\dots$ ..... تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{۸}\,\text{ممز}\,\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$

اور (۲) $\frac{۱}{۲^۲-۱}+\frac{۱}{۴^۲-۱}+\frac{۱}{۶^۲-۱}+\dots$ تا لاتناہی

$=\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۸}\,\text{ممز}\,\frac{\pi}{۲}$

(امثلہ ۱۲ مشق ۷ کا جواب استعمال کرو)

۱۱۳ — ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱^۲+\text{لا}^۲}-\frac{۳}{۳^۲+\text{لا}^۲}+\frac{۵}{۵^۲+\text{لا}^۲}-\dots$ .. تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{۴}\,\text{قطز}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{۲}$

اور $\frac{۱}{۱^۲+\text{لا}^۲}+\frac{۳}{۳^۲+\text{لا}^۲}-\frac{۵}{۵^۲+\text{لا}^۲}-\frac{۷}{۷^۲+\text{لا}^۲}+\dots$ ..... تا لاتناہی

$=\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}\,\text{جمز}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{۴}\;\text{قطز}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{۲}$

(امثلہ ۱۲ مشق ۹ میں ط کی بجائے $\frac{\pi}{۴}-\frac{\text{ط}}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{ط}}{۲}$ رکھو)

۱۱۴ — اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۱+\text{لا})^{\text{ن}}-(۱-\text{لا})^{\text{ن}}}{۲\,\text{لا}}=\text{ن}\prod_{\text{ر}=۱}^{\frac{\text{ن}}{۲}-۱}\left(\text{لا}^۲+\text{مس}^۲\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\;\text{مس}\,\frac{۲\pi}{۲\text{ن}}\;\text{مس}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\;\dots\;\text{مس}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}=۱$$

۱۱۵ — ثابت کرو کہ $\frac{(۱+\text{لا}^{\text{ن}})-(۱-\text{لا}^{\text{ن}})}{۲\,\text{لا}}$

$$=\left(\text{لا}^۲+\text{مس}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}^۲+\text{مس}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\dots\dots\left(\text{لا}^۲+\text{مس}^۲\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

جہاں $ر = \frac{۱}{۲} (ن - ۱)$ اور ن طاق ہے ۔

۱۱۶ ۔ ثابت کرو کہ لاتناہی حاصل ضرب $\frac{۱ + \frac{۱}{\pi}}{۱ + \frac{۱}{۲ \times ۱}} \times \frac{۱ + \frac{۱}{۲\pi}}{۱ + \frac{۱}{۳ \times ۲}} \times \frac{۱ + \frac{۱}{۳\pi}}{۱ + \frac{۱}{۴ \times ۳}} \times \cdots$

مساوی ہے قطز $(\frac{۱}{۲} \pi \sqrt{۳})$ جیبز π

۱۱۷ ۔ اگر عہ، بہ، جہ ...... اعدادِ مفرد ۲، ۳، ۵ ...... کو تعبیر کریں

تو $\frac{عہ^{۲} - عہ^{-۲}}{عہ^{۲} + ۱ - عہ^{-۲}} \times \frac{بہ^{۲} - بہ^{-۲}}{بہ^{۲} + ۱ - بہ^{-۲}}$ ..... تا لاتناہی $= \frac{۳}{۲}$

۱۱۸ ۔ ن اضلاع کے دو منتظم کثیر الاضلاع $ا_۱، ا_۲ ... ا_ن$ اور $ب_۱، ب_۲ ... ب_ن$ ایک ہی دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں جس کا نصف قطر ا ہے ، ثابت کرو

$$\prod (ا_ر ب_س) = ۲^{ن} ا^{ن} جب^{ن} \frac{ن طہ}{۲}$$

جہاں ر اور س کو ا سے ن تک سب قیمتیں دی جائیں اور طہ اُس زاویہ کو تعبیر کرے جو دو اشکال مذکورہ بالا میں سے ہر ایک کے ایک رأس الزاویہ کو مرکز دائرہ سے وصل کرنے والے نصف قطروں کے درمیان بنتا ہے

۱۱۹ ۔ ا ب ج د ....، ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے جو نصف قطر ا کے ایک دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے ، دائرہ کا مرکز و ہے ثابت کرو کہ اُن زوایا کا حاصل جمع جو ا ق، ب ق، ج ق، ..... وغیرہ و ق کے ساتھ بناتے ہیں

$$مس^{-۱} \frac{ر^{ن} جب ن طہ}{ر^{ن} جم ن طہ - ا^{ن}}$$

ہے ، جہاں و ق = ر اور $\angle$ ا و ق = طہ

(دفعہ ۱۱۹ کی مانند $ا^{ن} - ر^{ن}$ جم ن طہ + خ $ر^{ن}$ جب ن طہ کو اس کے خطی اجزائے

ضربی میں تحلیل کرو اور مثال ہذا کی پہلی مشق کے مسئلہ کے مطابق عمل کرو)

۱۲۰ - ایک دائرہ کے مماس پر نقطۂ تماس ب سے مساوی فاصلے ب ب۱، ب ب۲، ..... نا ب گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ دائرہ کے قطر کے مساوی ہے، ان فاصلوں کے وسطی نقاط ج۱، ج۲، ... ہیں، نقطہ تماس ب میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے ا کو نقاط ب۱، ب۲، ... ج۱، ج۲ ..... سے وصل کیا گیا ہے اور یہ خط دائرہ سے بالترتیب نقاط بَ۱، بَ۲، بَ۳، ..... جَ۱، جَ۲، ..... پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اوتار ب بَ۱، ب بَ۲، ..... کے حاصل ضرب کی نسبت ب جَ۱، ب جَ۲، .... کے حاصل ضرب کے ساتھ $\text{جا}\,\pi\,\text{مز}\,\overline{\pi} : \text{ا}$ ہے۔

۱۲۱ - ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}(\text{مسز ا مم لا}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{د}} - \sum_{\text{ا}}^{\infty}\text{مس}^{-1}\frac{\text{۲ لا ا}}{\text{ن}^2\pi^2 - \text{لا}^2 + \text{ا}^2}$$

دو نقاط ن اور ق کا باہمی فاصلہ ۲ ف کے مساوی ہے اور یہ دونوں نقطے ایک خط مستقیم سے مساوی فاصلوں ج پر واقع ہیں۔ اس خط مستقیم پر لامتناہی نقطوں کا ایک ایسا سلسلہ واقع ہے کہ ان نقطوں کا باہمی فاصلہ ا ہے اور نقاط ن اور ق ان میں سے ایک نقطہ سے متساوی الفصل ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان زاویوں کا مجموعہ جو ن ق کے محاذی سلسلہ بالا کے ہر ایک نقطہ پر بنتا ہے ط ہو تو

$$\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2} = \text{مس}\,\frac{\pi\,\text{ف}}{\text{ا}}\,\text{مز}\,\frac{\pi\,\text{ج}}{\text{ا}}$$

(دفعہ ۱۲۲ کے مطابق جیب (لا + خ ا) کے اجزائے ضربی لو اور مثال ہذا کی مشق اول کا مسئلہ لگاؤ)

۱۲۲ـ ثابت کروکہ $\prod_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty}\left[۱-\dfrac{۱}{\text{ن}^۲+\text{ن}^۲}\right]=\dfrac{\text{جمز}\,\pi۲-\text{جم}\,\pi\sqrt{۳}}{\text{جمز}\,\pi\sqrt{۲}-\text{جم}\,\pi\sqrt{۲}}$

(دفعہ ۱۳۰ کی مساوات (۲) میں ۲ عہ = π اور ۲ طہ = π $\sqrt{۳}$ رکھو، پھر ۲ عہ = π $\sqrt{۲}$ اور ۲ طہ = π $\sqrt{۲}$ رکھو، ایک جواب کو دوسرے جواب پہ تقسیم کرو)

۱۲۳ـ ثابت کروکہ سلسلہ

$$\text{مس}^{-۱}\,\text{ن}^۲+\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{ن}^۲}{۲^۲}+\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{ن}^۲}{۳^۲}+\ldots\ldots$$

کا حاصل جمع $\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{مس عہ}-\text{مسز عہ}}{\text{مس عہ}+\text{مسز عہ}}$ ہے جہاں عہ = $\dfrac{\text{ن}\,\pi}{\sqrt{۲}}$

(دفعہ ۱۲۲ کے نتیجہ سے شروع کرو اور طہ = ن π $\sqrt{\text{ج}}$ رکھو)

۱۲۴ـ ثابت کروکہ

$$\text{مس}^{-۱}\,\text{ن}^۲+\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{ن}^۲}{۳^۲}+\text{مس}^{-۱}\dfrac{\text{ن}^۲}{۵^۲}+\ldots\ \text{لاتناہی}=\text{مس}^{-۱}(\text{مس طہ}\ldots$$

جہاں طہ = $\dfrac{\text{ن}\,\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۱۲۵ـ ثابت کروکہ $\text{مس}^{-۱}(\text{تم طہ ممز فہ})+\text{مس}^{-۱}\left[\text{تم}\left(\text{طہ}+\dfrac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{ممز فہ}\right]$

$+\text{مس}^{-۱}\left[\text{تم}\left(\text{طہ}+\dfrac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\text{ممز فہ}\right]+\ldots\ldots$ ۲ ن رقوم

کا حاصل جمع $\text{مس}^{-۱}(\text{تم ن طہ ممز ن فہ})$ ہے۔ اگر ن طاق ہو اور

$\text{مس}^{-۱}(\text{تم ن طہ مسز ن فہ})$ ہے اگر ن جفت ہو

(امثلہ ۲۰ مشق ۱۰ کے نتیجہ کو استعمال کرو)

۱۲۶ـ سلسلہ $\text{مس}^{-۱}\dfrac{۱}{۱^۲}+\text{مس}^{-۱}\dfrac{۱}{۲^۲}+\text{مس}^{-۱}\dfrac{۱}{۳^۲}+\ldots\ldots$ ۱۳ لاتناہی

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(دفعہ ۱۳۰ کی مساوات (۲) سے شروع کرو اور ۲ عہ = ۲ طہ = ۲ ۱۱ ما ۲ ۳ خ رکھو)

۱۲۷۔ ثابت کرو کہ

مسؔ^۱ لا - مسؔ^۱ ۱/۳ لا + مسؔ^۱ ۱/۵ لا - ..... تا لاتناہی = مسؔ^۱ (مسز ۱۱ لا / ۴)

(مثلہ ۱۲ کی شق ۱۳ میں عہ = ۱۱/۴ اور طہ = ۱۱ لا خ / ۴ رکھو)

۱۲۸۔ اگر لا کوئی مثبت کسر ہو اور مسؔ^۱ ما اُس چھوٹے سے چھوٹے مثبت زاویہ کو تعبیر کرے جس کا مماس ما ہے تو ثابت کرو کہ

$\sum_{ر=۰}^{\infty}$ (-۱)^ر مسؔ^۱ [(۲ر+۱) لا / ((۲ر+۱)^۲ - لا^۲)] = مسؔ^۱ [جبز ۱۱ لا / ۴ قط ۱۱ لا ما ۳ / ۴]

۱۲۹۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویے حادہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج > جم ا + جم ب + جم ج

۱۳۰۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی منصف مقابل کے اضلاع سے نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

۱۳۱۔ اگر بہ، کی قیمت صفر اور ۱۱/۲ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ اگر طہ صفر سے بڑھکر بہ ہو جائے تو جملہ بہ جب طہ۔ طہ جب بہ کی قیمت پہلے بالتسلسل بڑھتی ہے اور پھر بالتسلسل گھٹتی ہے۔

۱۳۲۔ ثابت کرو کہ مقطعہ

جم طہ	۱	۰	۰	......	۰
۱	۲ جم طہ	۱	۰	......	۰
۰	۱	۲ جم طہ	۱	......	۰
......	......	......	......	......	......
۰	۰	......	۱	۲ جم طہ	۱
...	...	...... ۰		۱	۲ جم طہ

کی قیمت جو ن ستونوں اور ن قطاروں پر مشتمل ہے جم ن طہ کے مساوی ہے

۱۳۳ — ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{1}{\text{۲ مس عہ} +}\;\frac{1}{\text{۲ مس عہ} +}\;\frac{1}{\text{۲ مس عہ} +}\;\cdots\cdots$$

کا ن واں متدق
$$\frac{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ})^{\text{ن}} - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ})^{\text{ن}}}{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ})^{\text{ن}+1} - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ})^{\text{ن}+1}}$$
ہے

۱۳۴ — ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{2 - \text{۲ مس}^2\,\text{عہ} -}\;\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{2 - \text{۲ مس}^2\,\text{عہ} -}\;\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{2 - \text{۲ مس}^2\,\text{عہ} -}\;\cdots\cdots$$

کا ن واں متدق
$$\frac{\text{جب ۲ ن عہ}}{\text{جم}^2\,\text{عہ جب (۲ ن + ۲) عہ}}$$
ہے۔

۱۳۵ — ثابت کرو کہ ذیل کی کسر مسلسل کی قیمت

$$\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{-4}\;\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{-1}\;\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{-4}\;\frac{\text{قط}^2\,\text{عہ}}{-1}\;\cdots\cdots$$
ر خارج قسمتوں تک

$$\frac{\text{جب ر عہ}}{\text{۲ جب (ر + ۱) عہ جم عہ}}$$
ہے۔

۱۳۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = \frac{1}{1-}\;\frac{\text{طہ}^2}{3-}\;\frac{\text{طہ}^2}{5-}\;\cdots\cdots$$

(ذیل کے سوالوں میں احصائے تفرقات سے کام لینے میں بہت آسانی ہوگی)

۱۳۷ — ثابت کرو کہ $\text{مم}^{2}\,\text{فہ} + \text{مم}^{2}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) + \text{مم}^{2}\left(\text{فہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right) + \ldots$ ن رقموں تک

$$= \text{ن}^{2}\,\text{تم}^{2}\,\text{ن فہ مم ن فہ} - \text{ن مم ن فہ}$$

(اسلہ ۹ مشق ۶ کے جواب کو دو دفعہ تفرق کرو)

۱۳۸ — ایک متساوی الساقین مثلث کے دو مساوی اضلاع کا طول دیا ہو تو ثابت کرو کہ جب اندرونی دائرہ کا نصف قطر بڑے سے بڑا ہو تو مساوی اضلاع کے درمیانی زاویہ کی قیمت قریب ترین درجہ تک ۷۶° کے مساوی ہوگی -

۱۳۹ — سلسلہ $\text{قط}^{2}\,\text{لا} + \frac{1}{4}\,\text{قط}^{2}\frac{\text{لا}}{2} + \frac{1}{4^{2}}\,\text{قط}^{2}\frac{\text{لا}}{2^{2}} + \frac{1}{4^{3}}\,\text{قط}^{2}\frac{\text{لا}}{2^{3}} + \ldots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو -

۱۴۰ — سلسلہ $\text{جم طہ} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{جم}^{3}\text{طہ}}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\,\frac{\text{جم}^{5}\text{طہ}}{5} + \ldots$ تا لامتناہی کو جمع کرو۔

۱۴۱ — $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طہ} + 1}$ کو ن ایسے کسور جزوی کے حاصل جمع کی شکل میں لکھو جن میں سے ہر ایک کا نسب نما لا میں درجہ دوم کا ایک جملہ ہو۔

۱۴۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^{2}\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}^{2}} + \frac{1}{(\text{لا}+\pi)^{2}} + \frac{1}{(\text{لا}-\pi)^{2}} + \frac{1}{(\text{لا}+2\pi)^{2}} + \frac{1}{(\text{لا}-2\pi)^{2}} + \ldots\ldots$$

(اسلہ ۲ مشق ۱۱ کے جواب کو تفرق کرو)

۱۴۳ — ایک لامتناہی طول کا خط نقطوں کی ایک لامتناہی تعداد سے ایسے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن میں سے ہر ایک حصہ کا طول ا ہے ، اس خط پر ایک اور نقطہ و کہیں لیا گیا ہے ، ثابت کرو کہ و کے جو فاصلے نقاط تقسیم سے ہیں ان کے معکوسوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ

$$\frac{\pi^{3}}{32\,\text{ء}^{3}}\left(3\,\text{قم}^{2}\,\frac{\pi\,\text{ب}}{\text{ء}}-2\,\text{قم}^{3}\,\frac{\pi\,\text{ب}}{\text{ء}}\right)$$ ہے۔

(مشق ۲۱ مشق ۱۱ کے جواب کو دو مرتبہ تفرق کرو)

۱۴۴ - ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty}\frac{1}{\text{ن}^{2}+\text{لا}^{2}}=\frac{\pi}{4\,\text{لا}^{3}}\sqrt{2}\times\frac{\text{جبز}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{2}+\text{جب}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{2}}{\text{جبز}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{2}-\text{جم}\,\pi\,\text{لا}\sqrt{2}}-\frac{1}{2\,\text{لا}^{4}}$$

(دفعہ ۱۴۰ کی مساوات (۲) میں ۲ عہ = ۲ طہ = π لا √۲ رکھو پھر لوگارثم لیکر طہ کے لحاظ سے تفرق کرو)

جوابات

حصۂ دوم

۱ صفحہ ۱۳

۸- لوک وَ² ۹- لوکـ وَ³ - نوَ - ...

۲ صفحہ ۳۳

۱- $\sqrt{۲}\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{۴}\right)$

۲- $\sqrt{۲}\left[\text{جم}\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) + \text{خ جب}\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)\right]$

۳- $۲\left[\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۶} + \text{خ جب}\,\frac{۵\pi}{۶}\right]$

۴- $۵\left[\frac{۳}{۵} + \text{خ}\,\frac{۴}{۵}\right]$

۵- $\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}\left[\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}} + \text{خ}\,\frac{۱}{\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}\right]$

۶- $\left(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}\right)\left[\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۱۲} + \text{خ جب}\,\frac{۵\pi}{۱۲}\right]$

۷- جم (۱۰ طہ + ۱۲ عہ) - خ جب (۱۰ طہ + ۱۲ عہ)

۸- جم (عہ + بہ - جہ - لہ) + خ جب (عہ + بہ - جہ - لہ)

۹- جم ۱۰۷ طہ - خ جب ۱۰۷ طہ ۱۰- ۱-

۱۱۔ جب (۳ ع + ۵ ب) − خ جم (۴ ع + ۵ ب)

۱۲۔ $۲^{ن+۱}$ جب^{ن} $\frac{ط - ف}{۲}$ جم ن $\frac{\pi + ط + ف}{۲}$

۱۳۔ جم $\frac{\pi}{۵}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۵}$، جم $\frac{۳\pi}{۵}$ ± خ جب $\frac{۳\pi}{۵}$

۳ صفحہ ۴۲

۱۔ ۱، $\frac{-۱ \pm خ\sqrt{۳}}{۲}$　　۲۔ ± ۱، ± خ، $\frac{\sqrt{۳} \pm خ}{۲}$، $\frac{-\sqrt{۳} \pm خ}{۲}$

۳۔ ± (جم ر $\frac{\pi}{۱۲}$ + خ جب ر $\frac{\pi}{۱۲}$)، جہاں ر = ۳، ۷ یا ۱۱

۴۔ ± خ اور ± (جم ر $\frac{\pi}{۱۰}$ ± خ جب ر $\frac{\pi}{۱۰}$)، جہاں ر = ۱ یا ۳

۵۔ ± $\sqrt[۳]{۲}$ (جم ر $\frac{\pi}{۲۴}$ + خ جب ر $\frac{\pi}{۲۴}$) جہاں ر = ۱، ۹ یا ۱۷

۶۔ $\sqrt[۳]{۲۰۴۸}$ [جم ر $\frac{\pi}{۹}$ + خ جب ر $\frac{\pi}{۹}$] جہاں ر = ۵، ۱۱ یا ۱۷

۷۔ ± $\sqrt[۴]{۲}$ [جم ر $\frac{\pi}{۱۲}$ − خ جب ر $\frac{\pi}{۱۲}$]، جہاں ر = ۱ یا ۷

۸۔ $\sqrt[۳]{۲}$ [جم ر $\frac{\pi}{۱۸}$ + خ جب ر $\frac{\pi}{۱۸}$] جہاں ر = ۱، ۱۳ یا ۲۵

۹۔ $\sqrt[۵]{۲}$ [جم ر $\frac{\pi}{۱۵}$ + خ جب ر $\frac{\pi}{۱۵}$]، جہاں ر = ۱، ۵، ۱۱، ۱۷ یا ۲۳

۱۰۔ ± ۲ اور ± ۲ خ

۱۱۔ ۲ اور ۲ [جم ر $\frac{\pi}{۵}$ ± خ جب ر $\frac{\pi}{۵}$]، جہاں ر = ۲ یا ۴

۱۲۔ − ۱۰۲۴　　۱۳۔ ± $\frac{\sqrt{۳} + خ}{۲}$ اور ± $\frac{۱ - \sqrt{۳}\,خ}{۲}$

۱۴۔ ۱　　۱۶۔ ± ۱، ± خ، ± (جم $\frac{\pi}{۴}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۴}$) اور ± (جم $\frac{\pi}{۸}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۸}$)
چار آخری قیمتیں

۱۷۔ − ۱ اور جم ر $\frac{\pi}{۷}$ ± خ جب ر $\frac{\pi}{۷}$ جہاں ر = ۱، ۳ یا ۵

۱۸۔ − ۱، جم $\frac{\pi}{۳}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۳}$، ± (جم $\frac{\pi}{۹}$ + خ جب $\frac{\pi}{۹}$) اور ± (جم $\frac{\pi}{۹}$ خ جب [illegible])

۱۹۔ $۲\sqrt[۳]{۲}$ جم ر $\frac{\pi}{۹}$ جہاں ر = ۱، ۷ یا ۱۳

۴ صفحہ ۵۲

۶۔ (۵ مس ط − ۱۰ مس^۳ ط + مس^۵ ط) / (۱ − ۱۰ مس^۲ ط + ۵ مس^۴ ط)

۷۔ (۷ مس ط − ۳۵ مس^۳ ط + ۲۱ مس^۵ ط − مس^۷ ط) / (۱ − ۲۱ مس^۲ ط + ۳۵ مس^۴ ط − ۷ مس^۶ ط)

۸۔ (۹ مس ط − ۸۴ مس^۳ ط + ۱۲۶ مس^۵ ط − ۳۶ مس^۷ ط + مس^۹ ط) / (۱ − ۳۶ مس^۲ ط + ۱۲۶ مس^۴ ط − ۸۴ مس^۶ ط + ۹ مس^۸ ط)

۵ صفحہ ۶۳

۶۔ ۳ ۸۴ ۱۵ ۔۔۔ ۷۔ ۱/۴ ۔۔۔ ۸۔ ۲/م

۹۔ ا/ب ۔۔۔ ۱۰۔ ۱/۲ ۔۔۔ ۱۱۔ ۳ ۔۔۔ ۱۲۔ ا^۲/ب^۲

۱۳۔ صفر ۔۔۔ ۱۴۔ −(ا^۲ + ا ب + ب^۲)/(ا ب) ۔۔۔ ۱۵۔ −۱/۲

۱۶۔ ۲ ۔۔۔ ۱۷۔ −۱/۴ ۔۔۔ ۱۸۔ −۲۵/۱۴

۱۹۔ −∞ ۔۔۔ ۲۰۔ ۲(ن^۲ − م^۲)/ن^۲ ۔۔۔ ۲۱۔ ۱/۳۰

۲۲۔ م/۲ ، (م − ن)^۲/(م ن) ۔۔۔ ۲۳۔ ۲۴ ۔۔۔ ۲۴۔ صفر

۲۵۔ لوک ا/ب ۔۔۔ ۲۶۔ و ۔۔۔ ۲۷۔ و^۳

۲۸۔ −۹/۲۵ ۔۔۔ ۲۹۔ ۱ ۔۔۔ ۳۰۔ صفر ۔۔۔ ۳۱۔ ۱

۳۲۔ و^۲/۲ ۔۔۔ ۳۳۔ صفر ۔۔۔ ۳۷۔ ۶/۹ ، −۱/۴

۶ صفحہ ۷۳

۸۔ لا^۵ − ۵۵ لا^۴ + ۳۳۰ لا^۳ − ۴۶۲ لا^۲ + ۱۶۵ لا − ۱۱ = ۰

۹ صفحہ ۹۶

۱- (۱/(۲^ن−۱)) جم ن طہ (ن طاق) اور (۱/(۲^ن−۱)) [(−۱)^(ن/۲) − جم ن طہ] (ن جفت)

۲- (−۱)^((ن−۱)/۲) (۱/(۲^ن−۱)) جب ن طہ (ن طاق) اور (−۱)^(ن/۲) (۱/(۲^ن−۱)) (۱ − جم ن طہ) (ن جفت)

۳- ن^۲ تم^۲ ن طہ (ن طاق) اور ۱/۲ ن^۲ تم^۲ (ن طہ/۲) (ن جفت)

۴- ن^۲ قط^۲ ن طہ − ن^۲ (ن طاق) اور ن^۲ ÷ [۱ − (−۱)^(ن/۲) جم ن طہ] − ن^۲ (ن جفت)

۵- −ن مم (ن π/۲ + ن طہ)   (۶) ن مم ن طہ

۷- (−۱)^((ن−۱)/۲) مس ن طہ (ن طاق) اور (−۱)^(ن/۲) (ن جفت)

۸- ن^۲ مم^۲ (ن π/۲ + ن طہ) + ن (ن − ۱)

۱۰- اگر ن طاق ہو تو صفر، اگر ن جفت ہو تو ۱/۲ × ن^۲ / ((−۱)^(ن/۲) جم ن طہ − ۱)

۱۱ صفحہ ۱۱۲

۱۷- جم ع جبنر ب − خ جب ع جبنر ب

۱۸- (جب ۲ع − خ جبنر ۲ب) / (جمنر ۲ب − جم ۲ع)

۱۹- ۲ (جب ع جمنر ب − خ جم ع جبنر ب) / (جمنر ۲ب − جم ۲ع)

۲۰- ۲ (جم ع جمنر ب + خ جب ع جبنر ب) / (جم ۲ع + جمنر ۲ب)

۲۱- جبنر ع جم ب + خ جمنر ع جب ب

۲۲۔ $\frac{\text{جنبز ۲ ھ + خ جب ۲ ب}}{\text{جنبز ۲ ھ + جم ۲ ب}}$

۲۳۔ ۲ $\frac{\text{جنبز ھ جم ب - خ جنبز ھ جب ب}}{\text{جنبز ۲ ھ + جم ۲ ب}}$

۱۲ صفحہ ۱۲۰

۱۔ $\pm$ $\frac{\text{ط}}{\text{۴}}$ + $\frac{\text{خ}}{\text{۲}}$ لوک $\frac{\text{۱+جب ط}}{\text{۱-جب ط}}$ [اگر جم ط مثبت ہو تو علامت + ہونی چاہئے
اگر جم ط منفی ہو تو -]

۲۔ جب$^{-1}$ ۲/۱ جب ط + خ لوک [۲/۱ + جب ط - ۲/۱ جب ط]

۱۳ صفحہ ۱۲۹

۱۵۔ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ لوک (ی^{2} + ۔۔۔) + خ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ے}}{\text{ی}}$ جہاں
ی = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ لوک $\frac{\text{جنبز ۲ لا - جم ۲ لا}}{\text{۲}}$ اور ے = مس$^{-1}$ (جم لا جنبز لا)

۱۵ صفحہ ۱۴۴

۱۔ ۲　　۲۔ ۲　　۳۔ ۵　　۴۔ - ۱　　۵۔ - ۳

۱۶ صفحہ ۱۵۰

۱۔ $\frac{\text{۴ جب ھ}}{\text{۵ - ۴ جم ھ}}$　　۲۔ صفر بشرطیکہ ھ، ۲ط کا کوئی ضعف نہ ہو

۴۔ $\frac{\text{جب ۲ ھ}}{\text{۱ - جب ۲ ھ + جب ۲ ھ}}$　　۳۔ $\frac{\text{جب ھ (جم ھ - جب ھ)}}{\text{۱ - جب ۲ ھ + جب ۲ ھ}}$

۵۔ [جب ع − ج جب (ع − ب) − جⁿ جب (ع + ن ب) + ج^(ن+۱) جب {ع + (ن − ۱) ب}] / (۱ − ۲ ج جم ب + ج^۲)

(جب ع − ج جب (ع − ب)) / (۱ − ۲ ج جم ب + ج^۲)

۶۔ [۱ − ج جمز ع − ج^ن جمز ن ع + ج^(ن+۱) جمز (ن − ۱) ع] / (۱ − ۲ ج جمز ع + ج^۲)

۷۔ (ج جمز ع) / (۱ − ۲ ج جمز ع + ج^۲)

۸۔ [جم ع + (−۱)^(ن−۱) {(ن + ۱) جم (ن − ۱) ع + ن جم ن ع}] / ۲ (۱ + جم ع)

۹۔ [جب ع + (۲ ن + ۳) جب ن ع − (۲ ن + ۱) جب (ن + ۱) ع] / ۲ (۱ − جم ع)

۱۰۔ اگر ن = ۴ م یا ۴ م + ۳، تو صفر اور اگر ن = ۴ م + ۱ یا ۴ م + ۲ تو ۱
اگر ن = ۴ م یا ۴ م + ۱ تو صفر اور اگر ن = ۴ م + ۲ یا ۴ م + ۳ تو −۱

۱۱۔ (۲ جم ب/۲)^ن جب (ع + ن ب/۲)

۱۲۔ (۲ جب ع)^ن جب (ن π/۲ + ن ع/۲) سوائے اس صورت کے جبکہ ع = ن π

۱۳۔ اگر ن طاق ہو تو صفر، اور اگر ن جفت ہو تو (−۱)^(ن/۲) جب^ن ع

۱۴۔ (۲ جب ع/۲)^(−ن) × جب (ن π/۲ − ن ع/۲)؛ . . . . اگر ن < ۱

۱۵۔ √(جم ط (۱ + جم ط))، . . . اگر ط، −π/۲ اور +π/۲ کے درمیان واقع ہو

۱۶۔ (۲ جمز ی/۲)^ن جمز (ن + ۲)/۲ ی

۱۷ منو ۱۵۵

۱۔ $و^{\text{ج جم ب}}$ جب (ه + ج جب ب)

۲۔ $و^{\text{ج جم ب}}$ جم (ه + ج جب ب)

۳۔ $و^{\text{جم ه جم ب}}$ جم (جم ه جب ب)

۴۔ جب ه جم (جم ب) جبز (جب ب) − جم ه جب (جم ب) جمز (جب ب)

۵۔ جب (جم ب) جمز (جب ب) جم (ه − ب)
− جم (جم ب) جبز (جب ب) جب (ه − ب)

۶۔ $و^{\text{جمز ه}}$ جبز (جبز ه) ۷۔ $و^{\text{جمز ه}}$ جمز (جمز ه)

۸۔ $و^{\text{ما جم (جب ه)}}$ جم {ما جب (جب ه)} . . . . جہاں ما = $و^{\text{جم ه}}$

۹۔ $و^{\text{ما جم (جم ه)}}$ × جم {ما جب (جم ه)} . . . جہاں ما = $و^{\text{جب ه}}$

۱۰۔ $\frac{1}{2}$ $و^{\text{جم ط}}$ {جم (ط + جب ط) + ۲ جم (جب ط)}
+ $\frac{1}{2}$ $و^{-\text{جم ط}}$ {جم (ط − جب ط) − ۲ جم (جب ط)}

۱۱۔ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{ج جب ه}}{1 + \text{ج جم ه}}$، سوائے اس صورت کے جب ج = ۱ اور ه = (۲ن + ۱) π

۱۲۔ $\frac{1}{2}$ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{۲ ج جب ه}}{1 - \text{ج}^2}$، سوائے اُس صورت کے جب ج = ۱ اور ه = ن π

۱۳۔ $\frac{1}{4}$ لوک $\frac{1 + \text{۲ ج جم ه} + \text{ج}^2}{1 - \text{۲ ج جم ه} + \text{ج}^2}$ (۱۴) $\frac{1}{2}$ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{۲ ج جم ه}}{1 - \text{ج}^2}$

۱۵۔ $\frac{1}{4}$ لوک $\frac{1 + \text{۲ ج جب ه} + \text{ج}^2}{1 - \text{۲ ج جب ه} + \text{ج}^2}$

۱۶۔ اگر جم ه مثبت ہو تو + $\frac{\pi}{4}$، منفی ہو تو − $\frac{\pi}{4}$، صفر ہو تو صفر

۱۷۔ $\frac{1}{2}$ جم (ه − ب) $\text{مس}^{-1} \frac{\text{۲ ج جم ب}}{1 - \text{ج}^2}$ − $\frac{1}{2}$ جب (ه − ب) $\text{مسز}^{-1} \frac{\text{۲ ج جب ب}}{1 + \text{ج}^2}$

۱۸۔ $\frac{1}{2}$ لوک (جب $\frac{\text{ه + ب}}{2}$ قم $\frac{\text{ه − ب}}{2}$) سوائے اس صورت کے جبکہ ه ± ب، ۲π کا کوئی ضعف ہو

۱۹- ½ لوک [(۱ + ج) + √(۱ + ۲ ج جم ۲ ص + ج²)]

۲۰- ... ۲۱- ½ مس⁻¹ (جم ۲ تمز ص)

۲۲- ½ [۲√۲ لوک (۲ + √۲) − ۲√۲ ...]

۱۸ صفحہ ۱۶۰

۱- مم ط/۲ − مم ن⁻¹ ط (۲) تم ط {مم ط − مم (ن + ۱) ط}

۳- تم ط {مس (ن + ۱) ط − مس ط}

۴- تم ف {مس (ط + ن ف) − مس ط}

۵- ½ تم ع {مس (ن + ۱) ع − مس ع}

۶- جن = ط/(۱−ط²) مم ۱/(۱−ط²) − ۲ مم ۲ ط، اور

جـ∞ = ۱/ط − ۲ مم ۲ ط

۷- ۲ ممز ۲ ط − ۱/(۱−ط) ممز ط/(۱−ط)

۸- مس ۲ن ط − مس ط

۹- مس ط − مس ط/۲ن، مس ط

۱۰- جب ط (مم ط − مم ۲ن ط)

۱۱- ½ جب ۲ ط + (−۱)ⁿ⁺¹ ۱/(۱+ن) جب ۲ⁿ⁺¹ ط

۱۲- ½ جب ۲ ط − ۱/(۱+ن) جب ۲ⁿ⁺¹ ط

۱۳- ½ تم ط/۲ (قط (۲ن+۱)/۲ ط − قط ط/۲)

۱۴- جن = ۱/(۱−ن) مس ۲ن ع − ۲ مس ع

۱۵- ½ {۲ جم ط + (−½)ⁿ⁻¹ جم ۲ⁿ ط}

۱۶- ½ {۲ⁿ جب ط/۲ⁿ − جب ط}

۱۷- $\frac{1}{2}$ {ن مس ن ط - مس ط}

۱۸- $\frac{1}{2}$ {م ط - ن م ن ط}

۱۹- مس$^{-1}$ {(ن+۱) (ن+۲)} - مس$^{-1}$ ۲

۲۰- مس$^{-1}$ (ن+۱) - مس$^{-1}$ ۱ یعنی مس$^{-1}$ $\frac{ن}{ن+۲}$

۲۱- جن = مس$^{-1}$ ن - مس$^{-1}$ ۱ ج$_{\infty}$ = $\frac{\pi}{4}$

۲۲- جن = جا$^{-1}$ ۱ - جا$^{-1}$ $\frac{1}{ن+1}$، اور ج$_{\infty}$ = $\frac{\pi}{2}$

۱۹ صفحہ ۱۶۷

۱- ۱ - ا جم ط + ا^{2} جم ۲ ط - ا^{3} جم ۳ ط + . تالامتناہی

۲- جم ط + ا جم (ط + ف) + ا^{2} جم (ط + ۲ ف) + ... تالامتناہی

۳- جب ط + ا جب (ط + ف) + ا^{2} جب (ط + ۲ ف) + ... تالامتناہی

۴- جم ط + ا جم (ط + ف) + $\frac{ا^2}{|2}$ جم (ط + ۲ ف) + $\frac{ا^3}{|3}$ جم (ط + ۳ ف) + ... تالامتناہی

۵- ر ط جب ف + $\frac{ر^2 ط^2}{|2}$ جب ۲ ف + $\frac{ر^3 ط^3}{|3}$ جب ۳ ف + ... تالامتناہی

۶- جہاں ر = + $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ اور ف = مس$^{-1}$ $\frac{ب}{ا}$

۹- لا جم ع - $\frac{1}{2}$ لا^{2} جب ۲ ع - $\frac{1}{3}$ لا^{3} جم ۳ ع + $\frac{1}{4}$ لا^{4} جب ۴ ع + $\frac{1}{5}$ لا^{5} جم ۵ ع - ...... تالامتناہی

۱۰- لا + ا - ر π ۲ = - جم ع جب لا - $\frac{1}{2}$ جم^{2} ع جب ۲ لا - $\frac{1}{3}$ جم^{3} ع جب ۳ لا - ... تالامتناہی

۱۲- (۱) م = مس$^{-1}$ $\frac{ع}{2}$ (۲) م = - مس$^{-1}$ ع

- لوک ۲ - جب ۲ ط + $\frac{1}{2}$ جم ۴ ط + $\frac{1}{3}$ جب ۶ ط - $\frac{1}{4}$ جم ۸ ط - $\frac{1}{5}$ جب ۱۰ ط + ... تالامتناہی

۱۴- ۲ [جب ط - ۱/۳ جب ۳ط + ۱/۵ جب ۵ط - .... تا لا نہایۃ]

۱۵- ۲ [جم ط س (π/۴ - ط/۲) - ۱/۲ جم ۲ط س^۲ (π/۴ - ط/۲) + ...]
+ ۲ لوک جم (π/۴ - ط/۲)۔

اگر صفر < ب < π/۲

۴۰ صفحہ ۱۸۴

۱- ∏ [لا^۲ + ۲ لا جم (۳ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱ یا ۲

۲- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۶ر+۱) π/۱۲ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲ یا ۳

۳- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۹ر+۱) π/۱۸ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴

۴- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۳ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵

۵- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۶ر+۲) π/۲۱ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶

۶- (لا-۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم ۲رπ/۵ + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲

۷- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۹ + ر] جہاں ر = ۰، ۱ یا ۲

۸- (لا-۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم ۲رπ/۷ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲ یا ۳

۹- (لا+۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲ یا ۳

۱۰- (لا^۲-۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم رπ/۵ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲، ۳ یا ۴

۱۱- (لا+۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۱۳ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱... یا ۵

۱۲- (لا^۲-۱) ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم رπ/۷ + ۱] جہاں ر = ۱، ۲، ۶

۱۳- ∏ [لا^۲ - ۲ لا جم (۲ر+۱) π/۱۹ + ۱] جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ... ۹

۴۱- دفعہ ۱۱۵ کی رقم میں لا کی بجائے ر لکھو اور پھر طرفین کا لوگارتم لو، ر کے لحاظ سے تفرق کرو اور پھر ط کے لحاظ سے تکمل کرو۔

۲۲ صفحہ ۲۲۲

۲- ± ۶ ....۳۲٫۴۶ فٹ اور ± ۶ ....۲۴۹۸۹ فٹ

۳- $\frac{\text{ا جم ۲ ب}}{\text{جم}^2 (\text{ع} + \text{۲ ب})}$ ل؎ اور $\frac{\text{ا جب}^2 \text{ ب}}{\text{جم}^2 (\text{ع} + \text{۲ ب})}$ ل

$\frac{\text{۳۶ ۲۲ ۱۰}}{\text{۵۴}}$ اور $\frac{\text{۲۲ (۳۶ − ۲) ۵}}{\text{۵۴}}$ فٹ

۷- $\frac{\text{لا − ما جم ج}}{\text{ج جب ب}}$ اور $\frac{\text{ما − لا جم ج}}{\text{ج جب ا}}$ نیم قطری زاویے

۸- $\frac{\text{۲۲}}{\text{۱۴}}$ انچ

۲۳ صفحہ ۲۳۰

۱- ۱ اور $\frac{\text{۳۶} \pm \text{۱}}{\text{۲}}$

۲- ۱ + ۲ جم ۴۰° ، −۱ + ۲ جم ۱۶۰° اور −۱ + ۲ جم ۲۸۰°

۳- ۴ اور ۲ ± ۲ ۳۶ (۴) ۴ اور ۱ ± ۳۶

۵- ۲۷۲ جم ط جہاں ط = ۳۳° ۳۷′ ۵۳″ ،
۱۵۳° ۳۷′ ۵۳″ ، ۲۷۳° ۳۷′ ۵۳″

۶- − $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ + $\frac{\text{۲ ۱۰ ۲}}{\text{۳}}$ جم ط ، جہاں ط = ۳۹° ۵۸′ ۱۵″ ، ۱۵۹° ۵۸′ ۱۵″ ، ۲۷۹° ۵۸′ ۱۵″

۷- $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ ۲۱۶ جم ط جہاں ط = ۴۴° ۴۹′ ۵۰″ ، ۱۶۴° ۴۹′ ۵۰″ ، ۲۸۴° ۴۹′ ۵۰″

۲۴ صفحہ ۲۳۳

۴- جملہ کی قیمت ۲ اور − ۲ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

۴- چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\sqrt{ا^۲ - ب^۲}$ ہے بشرطیکہ ا > ب

۵- بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں بالترتیب ۳ اور ½ ہیں۔

۶- چھوٹی سے چھوٹی قیمت = ۲ ا ب

۷- اگر ا اور ب کی علامات یکساں ہوں تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت (ا + ب)^۲ ہے۔

۸- ۲ مس ع ۹- ۲ قطع

متفرق مثالیں ۲۴۷

۴- $\frac{\pi}{۲}$ ، π ۵- ۲ - لا جب لا - جم لا

۶- $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{۲لا^۲} + \frac{۱}{۳لا^۳} + \ldots$ ۹- ۲-، ۴-، ۱ ± ۳√۲، خ + ۲ح (۲ ∓ ۳√)

۱۰- ۲- ۱۲- $\frac{\pi}{۴}$ جب لا اگر ۰ < لا < $\frac{\pi}{۲}$ ، اگر لا = $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{\pi}{۴}$ - جب لا اگر $\frac{\pi}{۲}$ < لا < π

۱۵- ۱۸، ۵۱۱ مربع فٹ ۲۰- ۱- $\frac{\pi}{۸}$

۲۱- ۱- (۱- جم ط) لوک (۲ جب $\frac{ط}{۲}$) - $\frac{\pi - ط}{۲}$ جب ط تاوقتیکہ ط، ۲π کا کوئی ضعف نہ ہو اس صورت میں مجموعہ ایک ہوگا۔

۲۲- م ع - $\frac{ن}{۲}$ م ^{ن} ع

۲۳- $\frac{۲}{جب ع}$ [مس $\frac{ع}{۲}$ جب ط + مس^۲ $\frac{ع}{۲}$ جب ۲ط + ...]

۲۴- $\frac{\pi}{(ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)}$ [ا (ا - ب)(ا - ج) م^{ا} π + ... + ...]

۳۱- ....۴، ۸، ۳۲- $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۳۸- $\frac{۱}{۲}$ [مس $\frac{ن}{۲}$ ط - مس ط]

۴۰- زاویہ ا ۴۴- مس ط - $\frac{ن}{۲}$ مس $\frac{ط}{۲}$

۴۵- $\frac{لا}{جب ط}$ × جب ط - $\frac{۱}{۲}$ $\frac{لا^۲}{جب^۲ ط}$ جب ۲ط + $\frac{۱}{۳}$ $\frac{لا^۳}{جب^۳ ط}$ جب ۳ط ......

۴۷ — ½ مس طہ

۵۰ — $\frac{جم^{2} عہ}{۲ جب عہ}$ [$\frac{۱}{جب عہ جب ۲عہ} - \frac{۱}{جب (ن+۱) عہ جب (ن+۲) عہ}$]

۵۱ — ۱ + ½ جم طہ + $\frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲}$ جم ۲طہ + $\frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲}$ جم ۳طہ + ...

۵۲ — $\frac{\pi^{2}}{۶}$ − ۳　　　۶۰ — مم $\frac{طہ}{ہ}$ − مم طہ

۶۱ — $\frac{جمنز (ن+۱) عہ جمنز ن عہ}{جمنز عہ}$　　　۷۸ — ۲۶۸۳۰

۷۹ — ۱۶۵۱۲۱ ، ۱۶۱۹۱　　　۸۰ — ۷۶۸ ، ۱۱۵۰ ، ۱۳۴۱

۸۱ — ½ قم عہ [قط (۲ن + ۲) عہ − قط ۲عہ]

۸۲ — ⅛ ($\frac{۱}{۱-ہ}$ مس ۳^ن طہ − ۳ مس طہ)

۸۸ — جب ۲عہ قم عہ قم ۲عہ − جب (۳ × ۲^ن عہ) قم ۲^ن عہ قم ۲^{ن+۱} عہ

۸۹ — جب طہ [مم $\frac{طہ}{۱+ہ}$ − مم $\frac{طہ}{۲}$]

۹۰ — مم طہ − ۲^ن مم ۲^ن طہ　　　۹۱ — ½ [$\frac{۱}{۱-ہ}$ مس ۲^ن لا − ۲ مس لا]

۹۲ — جب ن عہ قم عہ قط ۲ن عہ　　　۹۳ — ½ [مم $\frac{طہ}{۲}$ − مم $\frac{طہ}{۲^ن}$]

۹۴ — قم² لا − قم² ۲^ن لا　　　۹۵ — $\frac{۱}{ہ}$ مس ۲^ن طہ − مس طہ

۹۶ — مس⁻¹ $\frac{ن^{2}}{۱+ن+ن^{2}}$　　　۹۷ — مس⁻¹ $\frac{ن^{2}}{۲+ن+ن^{2}}$　　　۹۸ — مس⁻¹ ن لا

۹۹ — مس⁻¹ $\frac{لا جب طہ}{۱ - لا جم طہ}$ − مس⁻¹ $\frac{لا^{ن} جب ن طہ}{۱ - لا^{ن} جم ن طہ}$

۱۰۰ — ½ جنبز طہ [منز $\frac{طہ}{۱+ہ}$ − منز $\frac{طہ}{۲}$]

۱۰۱ — $\frac{۱}{۱+ہ}$ قمنز² $\frac{طہ}{۱+ہ}$ − ½ قمنز $\frac{طہ}{۲}$

۱۰۲- جو^ن ط جم (جب ط مس ط) − ۱

۱۰۸- $\frac{1+\text{ل}}{2}$ و^ل + $\frac{1}{2}$ و^{ل/۲} [(۲ − ل) جم $\frac{\text{ل}\sqrt{3}}{2}$ − $\sqrt{3}$ جب $\frac{\text{ل}\sqrt{3}}{2}$]

۱۱۰- $\frac{\pi}{8}$ $(\sqrt{2}+1)$

۱۲۶- مس^{-۱} $\frac{\text{جبز ل جب م + جب ل جبز م}}{\text{جبز ل جم م − جم ل جبز م}}$ − $\frac{\pi}{4}$ جہاں

ل = $\pi\sqrt{2}$ جم $\frac{\pi}{8}$ اور م = $\pi\sqrt{2}$ جب $\frac{\pi}{8}$

۱۳۹- ۲ تم^۲ ۲ ل − $\frac{1}{1-\text{ن}^2}$ تم^۲ $\frac{\text{ل}}{1-\text{ن}^2}$

۱۴۰- $\frac{1}{2}$ جم^{-۱} (۲ جب ط − ۱) تا وقتیکہ ط، ن π کے برابر نہ ہو
اِس صورت میں حاصل جمع جم $\frac{\pi}{2}$ ہوگا اگر ن جفت ہو اور − $\frac{\pi}{2}$
ہوگا اگر ن طاق ہو

۱۴۱- $\frac{1}{\text{ن جب ن ط}}$ $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1}$ $\frac{\text{جب}\left(\text{ط}+\frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)}{\text{ل}^2-2\text{ل جم}\left(\text{ط}+\frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)+1}$

تمّت

فہرست اصطلاحات

Amplitude	سمت
Analytical Trigonometry	علم مثلث تحلیلی
Analyse	تحلیل کرو
Complex	ملتف
Convergency	استدقاق
Circular function (s)	تفاعل تفاعیل مستدیرہ
Cubic equation	مساوات درجہ سوم - کعبی
Co-efficient	سر
Commensurable	متوافق
Data	معطیات، مفروضات
Double Valued function	دو قیمت والا تفاعل
e (exponent)	ہو
Exponential series	سلسلہ قوت نما
Expansion	تفصیل
Expand	پھیلاؤ
Hyperbolic functions	زائدی یا ہذلولی تفاعیل-
Sinh, Cosh, etc	ہذلولی جیب - جبز جمز وغیرہ
Index. Indices	قوت نما - قوت نماؤں
Incommensurable	متباین
Imaginary (wholly, partly)	خیالی - (کلاً جزاً)

Indeterminate	غیر معین
I	خ
Limiting value	انتہائی قیمت
Limit	انتہا - نہایت - غایت
$Lt_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n$	نہا$_{ن=\infty}$ (۱ + ۱/ن)^{ن}
Limit when n becomes infinitely great	انتہا، جب ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے
Logarithm to base e	لوکارتم اساس، و پر
Log	لوک
Many valued function	بہت سی قیمتوں والا تفاعل
Method of Induction	استقرا کا طریقہ
Multiple angle	ضِعفی زاویے
Multiples of 2π	۲π کے اضعاف
Modulus	مقیاس (مق)
Order of small quantities	مقادیر صغیر کا مرتبہ
Oscillating series	سلسلہ اہتزازی
Operation	عمل
Operator	عامل
Principal value	قیمت خاص
Proportional Parts	اجزائے متناسبہ
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Quadrature	رقبہ دریافت کرنا - تربیع کرنا
Resolve	تحلیل کرنا
Root	اصل

قیمت	Value
ایک قیمت والا	Single valued function
حل کرو	Solve
اصول نظریہ	Theory
غیر حقیقی یا خیالی	Unreal
ایک تفاعل کا دَور (ادوار)	Period (s) of function
احصاء	Calculus
احصاء تفرقات	Differential calculus
تفرقی مساواتیں	Differential equations
تفرقی سر	Differential coefficient
تفرقی	Differential
تفرقہ	Differentiation
تفرق کرو	Differentiate
احصاء تکملات	Integral Calculus
تکملی	Integral
تکمل	Integration
تکمل کرو	Integrate

غلط نامہ

علم مثلث تحلیلی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
٥	١٣	=١+ن لا+	=١+ن لا×
٩	١٣	ماقبل کا سلسلہ	ماقبل کا سلسلہ ٣
١٠	١	مترادف	معادل
١٠	٢	قو	و
١٨	٩	یعنی ی=١	یعنی انتہائی صورت میں ی=١
٢٤	١٠	پس رقم مذکور	پس جملہ مذکور
"	١٣	√-١+√٣	√-١×√٣
٣٢	١١	متماثل	متماثل
٣٤	٧	خم جم جہ،	خم جب جہ،
"	٨	خم جم لہ	خم جب لہ
٣٨	١٥	(لا+خم)^ی	(لا+خم)^ی =
"	١٦	[مرق	نکالا جائے
٣٩	١٢	√١٠٠	√-١
٤٠	١٥	جب ٣٢/٢	جب ٣٢
٤٣	٣	+√(١-ب خ)	+√ن(١-ب خ)
٤٦	٨	(ن-٢	(ن-٢)
٤٧	١٠	١ ن(ن-)/[٢	١- ن(ن-١)/[٢
٤٨	١٩	....) خ	....)+خ
٥٤	٨	=جم^ن طہ عہ	=جم^ن طہ - عہ
٥٩	٢	= (طہ - طہ/[٣)/طہ	= (طہ - طہ^٣/[٣)/طہ
٦٣	١٢	= و^٣ =	= و^(لا/٣) =
٧١	٦	١-}	١-}^٢
٧٨	١٨	٣خ جب طہ	٢خ جب طہ
٨٢	٦	اور ٢/٣	اور ٢
٨٢	١٢	جب^٥ طہ	جب ٥ طہ
٨٩	٨	سلسلۂ ذیل میں	سلسلہ میں

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۹۲	۸	(۵ − ۱)/۱	(ن − ۱)/۲
۱۰۹	۲	+ لا^۲/‏|۲	+ لا^۴/‏|۴
۱۱۷	۱۳	√(لا^۱ − ۱)	√(لا^۲ − ۱)
۱۳۲	۱۰	۲ ن π +	۲ ن خ π +
۱۳۵	۲	+ ۱/۲)	+ π/۲)
۱۳۷	۱۲	ج^۲ و^۱ خ عہ	ج^۲ و^۲ خ عہ
۱۵۰	۶	≠ = π/۲	≠ ± π/۲
۱۵۷	۱۰	مسئر لا^۳ ۱/۵	مسئر لا^۳ + ۱/۵
۱۶۹	۱۲	۲(ا^۲ + ب^۲)^{ن/۲}	۲(ا^۲ + ب^۲)^{ب/۲}
۱۶۷	۳	− ۱۲^ن	− ۲ ر^ن
۱۷۷	۱	ثابت کرو کہ	ثابت ہوا کہ
۱۹۴	۱۵	= ط^۲/۱π	= ط^۲/۲π
۱۹۶	۱۱	= π/۹۰	= π^۲/۹۰
۱۹۷	۶	= ط^۲/۲	= − ط^۲/۲
۲۴۹	۴	عہ مم طہ	عہ مم عہ
۲۵۰	۱	۱/(۲لا+) + ۱/(۲ لا+)	۱/(۲لا+) ۱/(۲ لا+)
۲۵۱	۲	ثابت کرو رجم	ثابت کرو کہ جم
۲۵۴	۹	π + خ	π ± خ
۲۵۶	۶	(۲ر − ۱)^π	(۲ر − ۱)π
۲۵۸	۹	۸ ا^۲ + ۱	۸ا^۲ − ۸ ا + ۱
۲۶۹	۴	قط عہ)^ج	قط عہ)^ن
۲۷۷	۱۶	۲ جب عہ)^{۲/۱}	۲ جب عہ)^{۱/۲}
۲۷۸	۵	(جم یہ) جمز	(جم یہ) جنر